

~~5-B-95~~

110

88

B. P. W.

III

389



LEZIONI
DI
ARITMETICA, ALGEBRA, GEOMETRIA
E
TRIGONOMETRIA

611937

LEZIONI

DI

ARITMETICA, ALGEBRA, GEOMETRIA

E

TRIGONOMETRIA

COMPILATE

SECONDO I PROGRAMMI MINISTERIALI PER LE SCUOLE SPECIALI
E PER L'AMMISSIONE
ALLA SCUOLA SUPERIORE DI GUERRA

dal

PROF. ARMANDO GUARNIERI



FIRENZE,
STABILIMENTO DI GIUSEPPE PELLAS
—
1870.

Proprietà Letteraria.

PREFAZIONE

Incaricato per tre anni consecutivi dell'insegnamento delle Matematiche nella Scuola preparatoria di Firenze, ho dovuto convincermi delle grandi difficoltà incontrate dagli Allievi per la mancanza di un conveniente libro di testo, che esponesse esclusivamente le materie indicate dal Programma Ministeriale, scevre di ogni altra teoria e corredate invece di qualche applicazione. Incoraggiato dai signori Uffiziali, che benignamente in quei Corsi mi prestarono ascolto, mi son deciso a colmare questa lacuna, ed è il risultato dei miei lavori che oggi pongo alla luce.

Io non pretendo aver esposto nulla di nuovo, anzi dichiaro fin d'ora, che questo libro non è che un semplice compendio, una raccolta di teorie che seguono esattamente l'ordine, e lo spirito del Programma, e che ho estratto dai migliori Autori moderni di Matematica.

Gli Studiosi vi troveranno sulla fine una numerosa riunione di Problemi coll'indicazione del risultato e avranno così il vantaggio di poter riscontrare se le soluzioni da essi eseguite sieno, o no, esatte.

Avendo tenuto conto delle osservazioni tutte che potei fare nei tre anni decorsi di insegnamento, spero che questo libro potrà riuscire di una qualche utilità.

L' Autore.

PROGRAMMA PRIMO

ARITMETICA

§ 1.

Dimostrazione delle regole per le prime quattro operazioni: addizione sottrazione, moltiplicazione e divisione dei numeri interi.

Si chiama *Quantità* tutto ciò che è suscettibile d'aumento o di diminuzione. L'idea della quantità, e anche di diverse varie quantità, può acquistarsi considerando uno stesso oggetto sotto svariati punti di vista. E così dall'esame dell'estensione lineare, da quello dello sforzo necessario a sollevarlo, ec., si acquisterà la nozione delle quantità che portano il nome di *lunghezza*, *peso*, ec.

Per avere un giusto concetto della grandezza relativa di più quantità della medesima specie si usa riferirle ad una di esse arbitraria, ma che una volta definita dee rimanere costante. Essa prende il nome di *Unità*.

Il risultato del paragone di una quantità coll'unità di misura dicesi *Numero*.

I Numeri si distinguono in *concreti* ed *astratti* secondochè indicano o non indicano la specie di unità alla quale si riferiscono. Così *tre* è numero astratto, *tre metri* è concreto.

Le Matematiche sono le scienze delle quantità misurabili.

L'Aritmetica è la scienza dei numeri e ne insegna la numerazione, ovvero maniera di contarli ed esprimerli ed il calcolo.

Numerazione.

I primi numeri hanno ricevuto nomi speciali senza legame l'un l'altro. *Uno* rappresenta l'unità; *due* la riunione di un' unità con un'altra; *tre* quella del numero due con una nuova unità. Proseguendo in questa guisa si formano i numeri *quattro, cinque, sei, sette, otto, nove e dieci*. Quest'ultimo numero dieci serve a formare delle nuove unità convenzionali, locchè semplifica oltremodo la numerazione, dispensando dall'inventare una serie indefinita di nomi. Queste nuove unità, ciascuna delle quali vale dieci volte l'antecedente, sono :

L'unità del second'ordine o *diecina*; l'unità del terz'ordine o *centinaio*; l'unità del quart'ordine o *migliaio*; l'unità del quint'ordine o *diecina di migliaia*; l'unità del sest'ordine o *centinaio di migliaia*; l'unità del settimo ordine o *milione*; l'unità dell'ottavo ordine o *diecina di milione*; l'unità del nono ordine o *centinaio di milione*; l'unità del decimo ordine o *bilione*, ec.

I numeri di diecine che non superano il dieci hanno ricevuto nomi particolari. Sono questi *venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta e novanta*.

Per enunciare i numeri compresi fra le suindicate unità si comincia sempre da quelle dell'ordine più elevato e così man mano si discende infino alle ultime. Per esempio si dirà *trecento settantanove, mille ottocento sessant'otto*, ec.

Fanno eccezione a questa regola i primi sei numeri dopo il dieci che diconsi invece *undici, dodici, tredici, quattordici, quindici e sedici*.

Per scrivere i primi nove numeri si sono adottate nove cifre o simboli, seguendo il sistema usato per la prima volta dagli Arabi, e che perciò vengon dette *cifre arabe*. Avanti quest'invenzione i numeri si scrivevano colle lettere alfabetiche, e in questa guisa li indicarono i Romani. Le cifre arabe sono :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno,	due,	tre,	quattro,	cinque,	sei,	sette,	otto,	nove.

Mediante una semplice convenzione si è pur giunti ad esprimere, con queste sole nove cifre, la serie indefinita dei numeri. Si è stabilito perciò che una cifra rappresenta unità di un ordine indicato dal posto che occupa cominciando da destra, e così la prima indicherà le unità, la seconda le diecine, la terza le centinaia, ec.

Per esempio, seguendo queste norme, quattromila seicento ventisette, si scriverà:

4627.

Può però accadere che in un ordine qualunque manchino le unità. In tal caso si supplisce e si rimpiazza la cifra significativa mancante col simbolo 0 (zero) che di per sé non ha alcun valore.

ESEMPIO: Il numero cinquantatremila sette si scriverà:

53007.

Viceversa, per leggere un numero di molte cifre, si compone in classi di tre in tre a partire dalla destra; la prima classe rappresenterà unità, diecine e centinaia semplici; la seconda unità, diecine e centinaia di migliaia, ec.

ESEMPIO: 78543 si legge:

settant'otto mila cinquecento quarantatre;

1009107

un milione novemila centosette.

Il sistema di numerazione, che abbiamo esposto sommariamente, dicesi *Sistema decimale* ed il numero *dieci* ne è la *base*. Si concepisce facilmente come si sarebbe potuto egualmente adottare il sistema *binario*, *ternario*, *quaternario*, ec., *undecadennario*, *dodecadennario*, ec., collo stabilire la convenzione che ogni cifra, avanzando a sinistra, acquista valore *due*, *tre*, ec., volte maggiore.

Addizione.

Si chiama *addizione* quell'operazione che serve a riunire due o più numeri in un solo. Ciò che ne risulta dicesi *somma*.

L'addizione si indica col segno $+$ che si pronunzia *più*.

ESEMPIO: $5 + 7$ significa la riunione di 5 e di 7.

La riunione dei numeri di una sola cifra si effettua le prime volte contando sulle proprie dita. In seguito è indispensabile apprenderla a memoria.

L'addizione di più numeri di varie cifre riposa sul seguente principio di per se stesso evidente: *quando i numeri sono scomponibili in varie parti si può, per unirli, aggruppare queste parti in un ordine qualsiasi*. Applicandolo in pratica si uniranno le unità con le unità, le decine con le decine, ec. Occorrerà però avere l'avvertenza, se in una delle somme parziali il risultato supera dieci, di trasportare il di più alle unità immediatamente superiori. Così nell'operazione qui sotto indicata, siccome l'unione di 8 centinaia con 9 centinaia darebbe 17 centinaia, le si convertiranno in un migliaio e sette centinaia, riportando il migliaio alla susseguente colonna.

7847
3952
<hr/> 11799

Si può dunque in complesso stabilire la regola pratica seguente:

Per eseguire l'addizione di più numeri si scrivono uno al disotto dell'altro in modo che le unità dello stesso ordine si corrispondano. Si aggiungono dapprima le cifre delle unità; se questa somma non è maggiore di 9 si scrive al risultato la cifra ottenuta; se supera 9 si scrivono le sole unità e si portano le decine in aggiunta alla colonna susseguente. Si continua al modo stesso addizionando sempre le unità dello stesso ordine nei due numeri sino a quelle dell'ordine più elevato la cui somma aggiunta a ciò che si è riportato precedentemente si scrive come fu trovata.

La riprova di un'operazione è un'altra operazione che serve di riprova alla prima. Per provare l'addizione si può

ricominciare in un altro ordine, per esempio dal basso in alto se la prima volta si era sommato dall'alto in basso. Deve così ritrovarsi il risultato dapprima ottenuto.

Sottrazione.

Quest'operazione ha per oggetto di cercar la differenza fra due numeri, cioè a dire di quante unità il maggiore supera l'altro.

Il risultato che si ottiene si chiama *resto* o *differenza*, il maggior numero *sottraendo* o *diminuendo*, il minore *sottrattore* o *diminutore*: ambidue son detti termini della *sottrazione*.

L'operazione si indica col segno — che si pronunzia *meno*.

Il segno = è quello di eguaglianza e si interpone appunto fra due quantità eguali.

La differenza di due numeri di una sola cifra o fra un numero di una cifra ed un altro che non lo superi di dieci si conta la prima volta sulle dita. In seguito queste differenze devon sapersi a memoria.

La sottrazione di due numeri di varie cifre si fonda sui principii seguenti:

1.° Se due numeri sono decomposti in uno stesso numero di parti e che tutte le parti del maggiore superino le parti corrispondenti del minore, la differenza dei due numeri dati potrà ottenersi sommando le differenze delle parti corrispondenti;

2.° La differenza di due numeri non cambia aumentando l'uno e l'altro egualmente.

Questi principii sono evidenti. Applichiamoli al caso pratico.

Abbiassi da sottrarre 27513 da 31274. Si scriveranno i due numeri un sotto l'altro e si dirà:

$$\begin{array}{r} 31274 \\ - 27513 \\ \hline 3761 \end{array}$$

3 unità sottratte da 4 unità dan di residuo 1 unità; sottraendo 1 diecina da 7 restano 6 diecine; 5 centinaia da 2 centinaia

non ponno togliersi; aggiungeremo allora dieci centinaia al numero superiore riserbandoci pel secondo principio di aggiungerne dieci anche all'inferiore; allora da 12 centinaia sottratte 5 centinaia ne rimangono 7.

Pel secondo principio summentovato si dovranno dunque aggiungere dieci centinaia o un migliaio al numero inferiore, con che il 7 si cambierà in 8, che non può sottrarsi da 1, ma usato anco una volta l'artificio di sopra si avrà la differenza in 3 migliaia.

E così si procederà per quante sieno le cifre.

Può dunque stabilirsi la regola pratica generale seguente:

— Per fare la sottrazione di due numeri intieri si scrive il minore sotto il maggiore in guisa che le unità dello stesso ordine si corrispondano, poi si toglie ciascuna cifra inferiore da quella che è posta al di sopra cominciando dalla destra; se una di queste sottrazioni è impossibile si aggiungono dieci unità alla cifra superiore, ma allora si continua l'operazione come se la cifra seguente del numero da sottrarre fosse maggiore di un unità. I risultati di queste diverse sottrazioni sono le cifre della differenza cercata.

Per verificare una sottrazione fa d'uopo aggiungere il resto al diminutore; se l'operazione è ben fatta si riprodurrà il sottraendo.

Debbasi ora sottrarre una differenza da un numero, per esempio, $10 - 3$ da 15. La differenza totale non cambia aggiungendo tanto all'uno che all'altro termine lo stesso numero 3, e perciò:

$$15 - (10 - 3) = 15 + 3 - (10 - 3 + 3) = 15 + 3 - 10.$$

Questo risultato essendo indipendente dalla scelta particolare dei numeri 15, 10 e 3, ne consegue che:

Per togliere da un numero una differenza di due altri basta togliere il maggiore e aggiungere il minore al numero stesso.

ESEMPLI:

$$28 - (22 - 5) = 28 + 5 - 22 = 11.$$

$$193 - (191 - 17) = 193 - 191 + 17 = 19.$$

Moltiplicazione.

La *moltiplicazione* è quell'operazione per mezzo della quale si ripete un numero tante volte quante unità son contenute in un altro. Il numero ripetuto chiamasi *moltiplicando*, l'altro *moltiplicatore* ed il risultato dell'operazione dicesi *prodotto*. Il moltiplicando e il moltiplicatore diconsi anche *fattori* del prodotto. Si dice pure che detto prodotto è multiplo del moltiplicando. In generale poi chiamansi multipli di un numero i prodotti ottenuti da questo numero moltiplicato per un altro numero intero qualunque.

ESEMPIO: 6, 9, 12, 15, ec., son tutti multipli del 3.

La moltiplicazione si indica col segno \times che si interpone fra i fattori.

Per eseguire una qualunque moltiplicazione fa d'uopo conoscere i prodotti di tutti i numeri di una sola cifra. Essi si trovano nella tavola seguente, detta tavola di Pittagora, dal nome del suo primo costruttore.

Tavola Pittagorica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Per formarla si aggiunge in ogni colonna verticale il numero che la comincia a quello precedente.

Si capisce anche come dopo un poco di esercizio debba farsi a meno della tavola Pittagorica e invece i prodotti risulteranno cognitivi a memoria.

La moltiplicazione in generale riposa sopra i principii che andiamo a dimostrare.

Se il moltiplicando è la somma di molti numeri, si otterrà il prodotto moltiplicando successivamente ciascuno di essi pel moltiplicatore e aggiungendo i risultati.

Sia $2 + 4 + 7$ da moltiplicarsi per 3. Giovandosi letteralmente della definizione della moltiplicazione, avremo:

$$(2 + 4 + 7) \times 3 = 2 + 4 + 7 + 2 + 4 + 7 + 2 + 4 + 7 = \\ 2 \times 3 + 4 \times 3 + 7 \times 3.$$

Se il moltiplicatore è la somma di più numeri, si otterrà il prodotto moltiplicando successivamente il moltiplicando per ciascuno di essi e sommando i risultati.

È difatto evidente che ripetere un numero, per esempio, diciassette volte, equivale a ripeterlo prima dieci e poi sette volte.

Il prodotto di due numeri intieri non cambia, invertendo i fattori.

Sieno i fattori 5 e 3. Siccome $3 = 1 + 1 + 1$ pel primo principio avremo:

$$3 \times 5 = (1 + 1 + 1) \times 5 = 5 + 5 + 5 = 5 \times 3.$$

Per moltiplicare un numero per 10, 100, 1000, ec., basta scrivere uno, due, tre zeri alla sua destra.

Infatti è evidente che operando in simil guisa si renderà il valore rappresentato da ciascuna cifra 10, 100, 1000, ec., volte più grande.

ESEMPIO: $3752 \times 1000 = 3752000.$

Ciò premesso, onde procedere dal semplice al composto, dobbiamo distinguere tre casi.

1.° CASO: *Il moltiplicatore ha una sola cifra.*

Sia: $7283 \times 5.$

Il numero 7283 potendo scomporsi in 7 migliaia, 2 centinaia, 8 decine e 3 unità, bisognerà ripetere 5 volte ognuna di queste parti ed aggiungere i risultati, e così avremo:

15 unità,
40 decine,
10 centinaia,
35 migliaia,

ed eseguendo la trasformazione possibile di ogni unità in quelle dell'ordine superiore:

36475.

Nella pratica, la moltiplicazione e la trasformazione si effettuano contemporaneamente, come qui sotto si vede:

$$\begin{array}{r} 7283 \\ 5 \\ \hline 36415. \end{array}$$

2.° CASO: *Moltiplicare un numero qualunque per una cifra significativa seguita da uno o più zeri.*

Abbiassi: $7283 \times 500,$

$$7283 \times 500 = 7283 \times (5 + 5 + 5, \text{ ec.}) =$$

ove il 5 è ripetuto 100 volte:

36415 ripetuto cento volte,

ossia: 3641500.

Ond'è che:

Per moltiplicare un numero qualunque per una cifra significativa seguita da uno o più zeri, si moltiplica per questa cifra, considerata come rappresentante unità semplici, e si scrivono alla destra del prodotto tanti zeri quanti ve ne sono nel moltiplicatore.

sione di 10 per 2 dava subito il vero quoziente cercato senza bisogno di altra prova.

Abbiassi ora da dividere due numeri qualunque, per esempio:

$$7890123 : 456.$$

Per determinare l'ordine delle più alte unità del quoziente separiamo a sinistra nel dividendo tante cifre quante ne occorrono per formare un numero che superi 456 e sia minore del suo decuplo; nel nostro caso questo sarà 789. L'ultima cifra 9 del medesimo rappresentando diecine di migliaia io dico che appunto l'unità più elevata del quoziente è di diecine di migliaia. È facile infatti verificare come questo quoziente sia compreso fra 10000 e 100000, giacchè si ha:

$$456 \times 10000 = 4560000$$

minore di 7890123

e $456 \times 100000 = 45600000$

maggiore di 7890123.

Ciò premesso riflettendo che il prodotto di questa cifra incognita di diecine di migliaia per 456 non può dare che diecine di migliaia almeno è facile il dedurne che essa si otterrà col dividere 789 per 456 e sarà per conseguenza 1.

Ora il dividendo dovendo comporsi dei prodotti parziali delle cifre del quoziente pel divisore con più il resto ne viene per chiara conseguenza che se noi sottragghiamo dal dividendo il prodotto di 456 per 1 diecina di migliaio ciò che rimarrà conterrà ancora gli altri prodotti parziali ed il resto. Effettuando quest'operazione si ottiene 3330123 numero che diviso per 456 col sistema precedente darà la cifra delle migliaia e quindi le altre continuando ad operare in modo analogo.

Ond'è che può dedursi la seguente regola generale per la divisione di due numeri qualunque:

Separando alla sinistra del dividendo tante cifre quante sono necessarie per formare un numero maggiore del divi-

sore e minore del suo decuplo la prima cifra del quoziente rappresenterà unità del medesimo ordine del numero formato da queste cifre, La prima cifra del quoziente è data dalla divisione del numero che si è separato alla sinistra del dividendo pel divisore. Moltiplicando il divisore pel numero che rappresenta la prima cifra del quoziente e togliendo il prodotto dal dividendo, il resto di questa sottrazione diviso pel divisore, darà l'insieme delle altre cifre del quoziente. Applicando a questa nuova divisione le regole enunciate, si otterrà la prima cifra del nuovo quoziente che è la seconda del quoziente totale cercato; le altre saranno date da una terza divisione. Si continua a questo modo finchè si ottenga un dividendo minore del divisore; questo risultato è il resto dell'operazione.

Nella pratica l'operazione stessa si dispone in uno dei modi sottoindicati, secondochè si effettuano le sottrazioni parziali in modo evidente, oppure le si eseguisciono contemporaneamente ai prodotti pure parziali:

7890123	456
456	17302
3330	
3192	
1381	
1368	
1323	
912	
Resto. . . 411.	

7890123	456
3330	17302
1381	
1323	
Resto. . . 411.	

Per fare la prova della divisione basta evidentemente moltiplicare il divisore pel quoziente ed aggiungere il resto;

dovrà riprodursi il dividendo quando l'operazione è ben fatta. Questa prova è stata qui effettuata per l'esempio di cui sopra.

Quoziente	17302
Divisore	<u>456</u>
	103812
	86510
	69208
Resto	<u>411</u>
Dividendo riprodotto .	7890123

§ 2.

Regola per risolvere un numero intero nei suoi fattori semplici e composti, proprietà principali relative al prodotto e al quoziente di due numeri, minimo comun dividendo di più numeri.

Un numero che ne divide esattamente un altro ne è un *divisore*.

ESEMPIO: 3 è divisore del 6.

Un numero è *primo* quando non ha altri divisori che se stesso e l'unità.

ESEMPIO: 3, 5, 7.

Due numeri son *primi fra loro* quando non hanno nessun divisore a comune.

ESEMPIO: 4 e 9.

Un numero che non è primo deve avere almeno un divisore primo.

Se infatti un numero non è primo deve avere uno o più divisori e fra questi il minore dovrà esser primo giacchè se non lo fosse ammetterebbe un altro divisore più piccolo che dividerebbe perciò il numero proposto.

Un numero, che non è primo, può sempre scomporsi in un prodotto di fattori primi.

Sia, per esempio, il numero 60 che non è primo e che per conseguenza deve avere un divisore primo, come nel caso nostro è il 2 che entra 30 volte in 60, avremo:

$$(\alpha) \dots 60 = 2 \times 30.$$

Se 30 fosse primo, la proposizione sarebbe già dimostrata. Ma invece non lo è ed ammette esso pure un divisore 2, in guisa che:

$$30 = 2 \times 15,$$

e sostituendo nell'eguaglianza (α):

$$(\beta) \dots\dots 60 = 2 \times 2 \times 15.$$

Quel che abbiamo detto del 30, dicasi del 15, che ammette il divisore primo 3, essendo $15 = 3 \times 5$ e perciò sostituito questo valore nell'eguaglianza (β), ne verrà:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$$

Il 5 essendo primo, la scomposizione del 60 è effettuata.

Ognuno capisce la generalità di questa prova, giacchè, per quanto grande sia il numero dato, i quozienti successivi delle divisioni andando sempre a diminuire, ne viene di forza che alla fine uno di essi deve essere numero primo.

Ond' è che per scomporre un numero qualunque nei suoi fattori semplici deronsi prendere i numeri primi per ordine di grandezza e provare se dividono questo numero. Quando una divisione riesce si effettua e nelle operazioni che seguono il quoziente viene ad essere sostituito al numero primitivo. Si continua così fino a trovare un quoziente primo.

Nella pratica l'operazione si dispone come è indicato pel numero qui sotto 161700:

161700	2	
80850	2	
40425	3	$\frac{2}{3}$
13475	5	
2695	5	
539	7	
77	7	
11	11	
1		

Quindi:

$$161700 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 = \\ 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11.$$

È utile, per effettuare simili decomposizioni, di conoscere i numeri primi per ordine di grandezza. Noi diamo una tavola di quelli che son compresi fra 1 e 1000.

Tavola dei numeri primi compresi fra 1 e 1000.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79
83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137
139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193
197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257
263	269	271	277	281	283	293	307	311	313	317
331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389
397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661
673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	823	829
839	853	857	859	863	877	881	883	887		
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997								

I fattori composti di un dato numero si deducono dai semplici combinandoli in tutte le guise possibili. Un buon

metodo pratico per quest'oggetto è quello che siamo per esporre.

Si formi una tavola composta di una serie di linee orizzontali che tutte abbian principio coll'unità e che contengano le diverse potenze di ognuno dei fattori primi del numero. Si moltiplichino poscia tutti i numeri della prima linea per tutti quelli della seconda, quindi tutti i prodotti ottenuti per i fattori di 3.^a linea e così di seguito.

ESEMPIO: Sia il numero 1350 che è eguale a $2 \times 3^3 \times 5^2$. Si avrà per le tre colonne in quistione la tavola seguente:

1	2		
1	3	3^2	3^3
1	5	5^2	

Moltiplicando i numeri delle due prime colonne orizzontali si hanno gli otto prodotti:

1, 3, 9, 27, 2, 6, 18, 54,

e moltiplicando poi questi risultati per quelli di 3.^a linea, si ottengono in definitiva i 24 divisori composti:

1, 3, 9, 27, 2, 6, 18, 54, 5, 15, 45, 135, 10, 30, 90, 270,
25, 75, 225, 675, 50, 150, 450, 1350.

Come era naturale fra i divisori resultanti si ottiene tanto l'unità come il numero stesso in quistione.

Per moltiplicare un numero pel prodotto di diversi fattori, basta moltiplicarlo successivamente per ciascuno di essi.

Sia, per esempio, 14 da moltiplicarsi per 36, che si compone dei tre fattori 2, 3 e 6, si avrà:

$$14 \times 36 = 36 \times 14 = 2 \times 3 \times 6 \times 14 = 14 \times 2 \times 3 \times 6.$$

Per moltiplicare due potenze di un numero, basta sommarne gli esponenti.

Si ha difatto:

$$2^2 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}.$$

Abbiassi ora $5 + 3$ da moltiplicarsi per $6 + 4$. Noi avremo per i principii già dimostrati nella moltiplicazione:

$$(5 + 3) \times (6 + 4) = (5 + 3) \times 6 + (5 + 3) \times 4 = \\ 5 \times 6 + 3 \times 6 + 5 \times 4 + 3 \times 4;$$

vale a dire che per moltiplicare una somma per un'altra fa d'uopo moltiplicare ciascuna delle parti del moltiplicando per ciascuna delle parti del moltiplicatore ed aggiungere i risultati.

Sia invece $13 - 4$ da moltiplicarsi per 5 . È evidente che:

$$(13 - 4) \times 5 = 5 \times (13 - 4) = 5 \times 13 - 5 \times 4.$$

Dunque per moltiplicare una differenza per un numero qualunque basta moltiplicare i suoi due termini per questo numero e sottrarre i risultati.

Il numero delle cifre di un prodotto è eguale alla somma delle cifre del moltiplicando e del moltiplicatore, ovvero a questa somma diminuita di un'unità.

Supponiamo per fissare le idee che il moltiplicando abbia 5 cifre e il moltiplicatore 3. Il massimo prodotto dovrà sempre esser minore di 100000×1000 ed il minimo dovrà superare 10000×100 e siccome questi prodotti sono rispettivamente 100000000 e 1000000 , il vero avrà 7 o 8 cifre, cioè a dire $5 + 3$, ovvero $5 + 3 - 1$, come volevasi provare.

Quando si moltiplica il dividendo e il divisore di una divisione per un medesimo numero, il quoziente non cambia ed il resto è moltiplicato per questo numero.

Sia $752 : 13$ che dà 57 per quoziente ed 11 per resto e si moltiplichino dividendo e divisore per 12, con che otterremo 9024 e 156.

Dall'eguaglianza:

$$752 = 57 \times 13 + 11,$$

moltiplicando ambo i membri per 12, si deduce:

$$752 \times 12 = 57 \times 13 \times 12 + 11 \times 12,$$

ovvero: $9024 = 57 \times 156 + 11 \times 12;$

lo che prova l'enunciata verità.

Per dividere un prodotto per uno dei suoi fattori, basta sopprimervi questo fattore.

Difatto il quoziente della divisione di $5 \times 7 \times 4$ per 7 è 5×4 , giacchè moltiplicando 5×4 per 7, si riproduce per l'appunto il dividendo.

Per dividere un numero pel prodotto di molti fattori, quando la divisione si fa esattamente, basta dividerlo successivamente per ciascuno di essi.

Sia $360 : 30$ che dà per quoziente 12, mentre $30 = 2 \times 3 \times 5$. Si avrà:

$$360 = 30 \times 12 = 2 \times 3 \times 5 \times 12.$$

Dividendo ambo i membri di questa eguaglianza per 2, viene:

$$360 : 2 = 3 \times 5 \times 12.$$

Dividendo ancora per 3:

$$360 : 2 : 3 = 5 \times 12.$$

Dividendo per 5:

$$360 : 2 : 3 : 5 = 12 = 360 : 30.$$

Per dividere due potenze di un numero, basta sottrarre gli esponenti.

Infatti il quoziente di 5^7 per 5^5 dovendo riprodurre 5^7 , quando lo si moltiplica per 5^5 , sarà di necessità $5^7 - 5 = 5^2$.

Il numero delle cifre di un quoziente è la differenza fra il numero delle cifre del dividendo e il numero delle cifre del divisore, oppure a questa differenza aumentata di un'unità.

La prima cifra del quoziente rappresenta infatti unità dello stesso ordine dell'ultima cifra del primo dividendo parziale, e perciò tanto l'una che l'altra saranno seguite dallo stesso numero di cifre, o, in altri termini, il numero delle cifre del quoziente si otterrà contando da destra a sinistra nel dividendo fino a includere l'ultima cifra del primo dividendo parziale. Ora riman chiaro che se la prima cifra del dividendo è più piccola della prima del divisore, il numero che così si conta, eguaglia la differenza delle cifre dei

due numeri e nel caso diverso viene ad accrescersi di una unità.

Dati due o più numeri, è spesso necessario il determinare il minimo loro multiplo, altrimenti detto *minimo comun dividendo*. Questa ricerca riuscirà facile, ove si rifletta che scomposti i numeri in fattori primi, esso dovrà di necessità contenere tutti questi fattori primi col massimo esponente, col quale si trovano nei numeri dati e non altro, onde sia adempiuta la doppia condizione di esser multiplo comune e minimo. Così essendo dati, per esempio, i tre numeri 200, 500 e 60; siccome:

$$\begin{aligned} 200 &= 2^3 \times 5^2, & 500 &= 2^2 \times 5^3, \\ 60 &= 2^2 \times 3 \times 5, \end{aligned}$$

il minimo loro multiplo dovrà essere:

$$2^3 \times 5^3 \times 3 = 3000.$$

§ 3.

Divisibilità di un numero per 2, 3, 5, 9. Teoremi sui quali è fondata la ricerca del massimo comun divisore di due numeri; regola che se ne deduce.

Se un numero divide esattamente tutte le parti di una somma, divide anche la somma.

Esso è difatti composto di parti eguali ciascuna ad un numero intero di volte il divisore e quindi dovrà pure contenerlo un numero esatto di volte.

ESEMPIO: 7 divide 35, 56 e 49 e divide pure la loro somma 140.

Qualunque numero che ne divide esattamente un altro, divide pure esattamente i suoi multipli.

Ciò risulta quasi evidente.

Un numero che ne divide esattamente due altri, divide la loro differenza.

Si dimostra in modo identico a quel che fu fatto per la somma.

Un numero che divide una somma e una delle sue parti, deve dividere l'altra parte.

Così se 6 divide 30 e la parte 12 dovrà dividere l'altra parte 18.

Difatto dall'eguaglianza:

$$30 = 12 + 18,$$

si deduce: $18 = 30 - 12;$

lo che ci fa rientrare nel caso precedente.

Se si dividono più numeri per uno stesso divisore, la somma loro e quella dei resti, divise pel divisore, danno resti eguali.

Siano i numeri 58, 86, 32 che divisi per 9 danno i quozienti 6, 9, 3, e i resti rispettivi 4, 5, 5.

Noi avremo:

$$58 = 9 \times 6 + 4,$$

$$86 = 9 \times 9 + 5,$$

$$32 = 9 \times 3 + 5.$$

Sommando queste eguaglianze, ne viene:

$$58 + 86 + 32 = 9 \times (6 + 9 + 3) + 4 + 5 + 5.$$

Ma $9 \times (6 + 9 + 3)$ è multiplo di 9, dunque il resto della divisione della somma totale pel dato divisore, non può provenire che dalla parte $4 + 5 + 5$.

Se si dividono più numeri per uno stesso divisore, il prodotto di questi numeri e quello dei resti divisi pel divisore, danno resti eguali.

Incominciamo a dimostrare questa verità per due soli numeri e siano 48 e 35 divisi per 11, che danno per quozienti rispettivi 4 e 3 e per resti 4 e 2.

Si ha: $48 = 4 \times 11 + 4,$

$$35 = 3 \times 11 + 2.$$

Moltiplicando membro a membro:

$$(x) \dots 48 \times 35 = 4 \times 3 \times 11^2 + 4 \times 3 \times 11 + 2 \times 4 \times 11 + 4 \times 2.$$

Le prime tre parti di questo prodotto essendo multiple di 11, il resto della divisione non può provenire che dal prodotto 4×2 dei resti parziali.

Se ora si avesse un altro numero:

$$(\beta) \dots 27 = 11 \times 2 + 5,$$

e che a questo, in unione dei primi due, volesse applicarsi il teorema in quistione, si osserverà che l'eguaglianza (α) può porsi sotto la forma:

$$48 \times 35 = \text{un multiplo di } 11 + 4 \times 2,$$

e moltiplicandolo per l'altra (β), avremo allora:

$$48 \times 35 \times 27 = \text{un multiplo di } 11 + 4 \times 2 \times 5.$$

Questo risultato comprova in modo evidente l'enunciato asserto e la dimostrazione può proseguirsi quando i fattori sieno in numero maggiore di tre.

Ciò premesso passiamo alla divisibilità dei numeri per 2, 3, 5 e 9.

Ogni numero pari è divisibile per due.

Sia, ad esempio, 474 che può scomporsi in $470 + 4$. Per una verità sopra dimostrata, si otterrà il resto della divisione di questo numero per 2 sommando i resti parziali delle divisioni per 2 di 470 e di 4. Ma 470 è multiplo di 10 e perciò divisibile esattamente per 2; 4 per ipotesi è cifra pari e perciò anche esso divisibile per 2. Dunque il resto della divisione complessiva è zero, come voleasi provare.

Se si riflette all'indole della dimostrazione, si vede che essa è generale e non dipende per nulla dalla scelta fatta del numero 474.

Un numero è divisibile esattamente per 3, quando la somma delle sue cifre è divisibile esattamente per 3.

A dimostrare questa verità fa d'uopo stabilire alcune premesse.

Prima di tutto se si divide l'unità, seguita da un numero qualsiasi di zeri per 3, si avrà sempre di resto 1. Ciò è evidente per 10. Per 100, si ha:

$$100 = 10 \times 10,$$

e perciò per un teorema cognito ad ottenere il resto della divisione di 100 per 3, si dovranno moltiplicare quelli parziali di $10 : 3$ e $10 : 3$ somministrati dai fattori del prodotto. Il risultato sarà:

$$1 \times 1 = 1.$$

In simil guisa si dimostrerà lo stesso per 1000 componendolo in 100×10 per $10000 = 1000 \times 10$ e così di seguito.

In secondo luogo dividendo per 3 un numero composto da una cifra significativa seguita da varii zeri, si ha lo stesso resto che col dividere l'anzidetta cifra significativa.

Sia ad esempio 7000. Avremo:

$$7000 = 1000 \times 7,$$

e perciò il resto cercato si otterrà moltiplicando fra loro quelli della divisione di 1000 e di 7 per lo stesso divisore. Se non che sapendosi che il resto che dà $1000 : 3$ è 1 ne verrà di conseguenza essere il resto dimandato quello della divisione di 7 per 3.

Stabiliti questi preliminari, abbiassi il numero qualunque 4589. Noi avremo:

$$4589 = 4000 + 500 + 80 + 9,$$

e perciò per altra verità, pure dimostrata, si otterrà il resto che dà $4589 : 3$ dividendo prima 4000 poi 500, indi 80 e 9 per 3 e sommando i risultati. Ora con ciò si otterrà lo stesso resto, che dà la somma $4 + 5 + 8 + 9$. E perciò se questo resto sarà zero, ossia se questa somma risulterà divisibile per 3 il numero 4589, lo sarà pure. Questo è precisamente ciò che avevamo a dimostrare.

ESEMPIO: 3276 è divisibile per 3, giacchè:

$$3 + 2 + 7 + 6 = 18 = 3 \times 6,$$

2891 non lo è, e dà per resto 2, giacchè:

$$2 + 8 + 9 + 1 = 20 \text{ e } 20 : 3,$$

dà per resto 2.

Un numero che termina per zero o per 5 è divisibile per 5.

Ciò è evidente se il numero termina per zero, essendo allora multiplo di 10, che è divisibile esattamente per 5. Se invece il numero dato termina per 5, come ad esempio 475, noi potremo decomporlo in $470 + 5$ parti amendue divisibili per 5. Dunque anche la loro somma 475 lo sarà egualmente.

Un numero è divisibile per 9 quando la somma delle sue cifre è divisibile per 9.

Questa proprietà si dimostra in modo identico a quello seguito pel numero 3. È perciò inutile il ripetere gli stessi ragionamenti. Dessa si applica con vantaggio ad una prova elegante della moltiplicazione.

Si determinino infatti i resti che darebbero il moltiplicando e il moltiplicatore divisi per 9 col metodo suaccennato. Moltiplicatili fra loro e diviso il risultato pure per 9, il resto che se ne ottiene, dovrà, per ciò che sappiamo, esser lo stesso di quello che somministra la divisione del prodotto per 9. Ove ciò non sia, l'operazione è sbagliata.

È bene però notare come la corrispondenza dei risultati non sia sempre indizio certo di esattezza, potendo provenire anche da una compensazione di errori. Un esempio schiarirà del tutto e il modo di operare e quest'ultima avvertenza:

$$\begin{array}{r} 372 \times 157 \\ \hline 2604 \\ 1860 \\ 372 \\ \hline 58404. \end{array}$$

La prova si effettua in questo modo:

Resto della divisione di $3 + 7 + 2$ per 9 =	3	4	Resto della divisione per 9 di $1 + 5 + 7.$
Resto della divisione del prodotto 3×4 per 9 =	3	3	Resto della divisione per 9 di $5 + 8 + 4 + 0 + 4.$

Suppongasì ora che si fosse avuto per prodotto 57414. La prova tornerebbe egualmente, mentre la moltiplicazione sarebbe sbagliata. E ciò dipende dal compenso degli errori prodotti dall'aver aumentato di una unità la cifra delle diecine e diminuita della stessa unità quella delle migliaia.

Chiamasi *massimo comun divisore* di due numeri il più gran numero che li divide amendue.

Da questa definizione risulta evidentemente:

1.° Che divisi due numeri pel loro massimo comun divisore, avremo due quozienti primi fra loro;

2.° Che il massimo comun divisore contiene tutti i fattori semplici comuni ai due numeri dati e non può contenerne altri.

Da questa seconda osservazione risulta un metodo facilissimo per la ricerca del massimo comun divisore di due numeri.

Decomporli nei loro fattori semplici, quindi fare il prodotto di quei fattori che son comuni ai due numeri.

ESEMPIO: 1572 e 624 sieno i numeri fra i quali si cerca il massimo comun divisore. Noi troveremo:

$$\begin{aligned} 1572 &= 2^2 \times 3 \times 131, \\ 624 &= 2^4 \times 3 \times 13. \end{aligned}$$

E perciò il massimo comun divisore sarà dato da:

$$2^2 \times 3 = 12.$$

Se non che comunemente si suole impiegare un processo più speditivo.

Dividasi il numero più grande pel più piccolo; è prima di tutto chiarissimo che, ove questa divisione si faccia esattamente, sarà questo numero più piccolo il massimo comun divisore cercato. Nel caso nostro ciò non avviene, ed invece si ha il quoziente 2 e il resto 324, e perciò:

$$1572 = 2 \times 624 + 324.$$

Da questa eguaglianza risulta:

1.° Che tutti i divisori comuni a 1572 e 624, e perciò a 2×624 dividendo una somma ed una delle sue parti, devono dividere l'altra parte 324;

2.° Che tutti i divisori comuni a 324 e 624, e perciò a 624×2 dividendo le due parti di una somma devono dividere la somma stessa;

3.° E perciò i tre numeri 1572, 624, 324 hanno gli stessi divisori comuni.

Cosicchè la ricerca del più gran comun divisore fra 1572 e 624 è ridotta a quella del massimo comun divisore fra 624 e 324.

In modo identico questi ultimi due numeri potranno rimpiazzarsi con altri più semplici e verrà in definitiva a stabilirsi la regola generale seguente:

Per cercare il massimo comun divisore di due numeri intieri si divide il maggiore pel minore, poi il minore pel resto della loro divisione e si continua così a dividere ciascun divisore pel resto corrispondente fino a che una di queste divisioni si faccia esattamente; l'ultimo resto è il massimo comun divisore cercato.

Può accadere che colla diminuzione successiva dei numeri su cui si opera l'ultimo residuo sia l'unità. Ciò significa che quest'unità è il massimo comun divisore richiesto, o in altri termini che i numeri proposti sono primi fra loro.

Nella pratica l'operazione si dispone nel modo qui sotto indicato negli esempi che seguono:

	2	1	1	12	2
1572	624	324	300	24	12;
324	300	24	12	0	

	4	3	1	1	1	7
359	84	23	15	8	7	1.
23	15	8	7	1	0	

§ 4.

Definizione delle frazioni ordinarie e loro principali proprietà. Riduzione di una frazione a più semplice espressione. Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore.

Se si immagina di aver divisa l'unità in un numero qualunque di parti eguali e che di queste se ne prenda pure un numero arbitrario si viene a formare una *frazione* o *numero frazionario*. Chiamasi *denominatore* quel numero che esprime in quante parti l'unità fu divisa e *numeratore* l'altro indicante quante di queste parti furon prese.

Le frazioni si scrivono ponendo il numeratore sopra al denominatore, ma separandoli con una lineetta orizzontale; si enunciano leggendo prima il numeratore e quindi il denominatore a cui si fa seguire la terminazione *esimo*.

ESEMPIO: $\frac{7}{12}$ leggesi sette dodicesimi.

Fanno eccezione a questa regola i denominatori da 2 fino al 10 inclusive che si pronunciano *mezzi*, *terzi*, *quarti*, *quinti*, *sesti*, *settimi*, *ottavi*, *noni*, e *decimi*.

Il numeratore e il denominatore si dicono anche complessivamente *termini* della frazione.

Secondochè il numeratore è minore, eguale o maggiore del denominatore, le quantità formate sono minori, eguali o maggiori dell'unità. Quelle minori son le frazioni propriamente dette, le maggiori son *numeri frazionari* e si compongono evidentemente di unità e parti dell'unità.

Una frazione rappresenta il quoziente del suo numeratore pel denominatore.

Ciò è quasi evidente: si comprende, per esempio, che 13 settimi dell'unità equivalgono ad un settimo di 13 unità. Ogni prova ulteriore, oltre d'esser superflua, servirebbe anzi a confondere le idee.

Da ciò risulta che moltiplicando una frazione pel suo denominatore, deve riprodursi il numeratore.

ESEMPIO: $\frac{3}{7} \times 7 = 3$.

L'osservazione fatta antecedentemente, completa anche del tutto l'idea della divisione. Così volendo dividere 43 per 9, osserveremo che:

$$43 : 9 = \frac{43}{9} = \frac{4 \times 9 + 7}{9} = 4 + \frac{7}{9}.$$

E perciò:

1.° *Il quoziente vero di una divisione, che non può eseguirsi esattamente, si ottiene dalla somma del quoziente intero e del resto diviso pel divisore;*

2.° *Per estrarre la parte intera di un numero frazionario, si divida il suo numeratore pel denominatore.*

Viceversa, volendo convertire un intero in frazione che abbia per denominatore un numero dato, come, per esempio, convertire il 9 in quarti, siccome ogni unità è $\frac{4}{4}$ il numero 9 sarà dato da nove volte $\frac{4}{4}$, ossia $\frac{36}{4}$. E perciò si dovrà moltiplicare l'intero pel numero dato e dare al prodotto questo stesso numero per denominatore.

Moltiplicando o dividendo il numeratore di una frazione per un intero, la frazione resta pure moltiplicata o divisa per questo intero.

Difatto restando lo stesso il denominatore, le parti in cui fu divisa l'unità conservano il loro valore e quindi col prenderne due, tre, quattro, ec., volte più o meno si accresce o diminuisce in simil guisa il valore della frazione.

ESEMPIO: $\frac{45}{7}$ è il triplo di $\frac{15}{7}$, come $\frac{5}{7}$ ne è il terzo.

Moltiplicando o dividendo il denominatore di una frazione per un intero si divide o si moltiplica la frazione per questo numero.

Difatto con quest'operazione si viene a dividere l'unità in parti due, tre, quattro, ec., volte più piccole o più grandi delle primitive, e siccome se ne prende sempre lo stesso numero, è evidente che il valore della frazione debba diminuire o aumentare in simil guisa.

ESEMPIO: $\frac{1}{8}$ è la metà di $\frac{1}{4}$, come $\frac{1}{2}$ ne è il doppio.

Dalle due proprietà sopra dimostrate, risulta ad evidenza come moltiplicando o dividendo i due termini di una frazione per uno stesso numero, il valore assoluto della frazione non rimane alterato. E così data una frazione qualsiasi, se ne possono

avere un numero infinito di egual valore moltiplicandone i termini per la serie indefinita dei numeri intieri.

ESEMPIO: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} =$, ec.

Viceversa data una frazione i cui termini sieno numeri molto grandi la si potrà in qualche caso semplicizzare dividendone i termini per un qualche fattor comune. E così la frazione rimarrà ridotta alla espressione più semplice quando vengano soppressi tutti i fattori comuni al numeratore e al denominatore, lo che equivale a dividerli amendue pel loro massimo comun divisore. E perciò:

Onde ridurre una frazione alla più semplice espressione si dividono i suoi due termini pel loro massimo comun divisore.

La frazione risultante dicesi *irreducibile*. Il carattere che la distingue è quello di avere i suoi due termini primi fra loro.

ESEMPIO: Sia la frazione $\frac{1470}{2730}$.

Cerchisi il massimo comun divisore fra 1470 e 2730.

	1	1	6
2730	1470	1260	210
1260	210	000	

Trovatolo eguale a 210, siccome:

$$1470 : 210 = 7 \text{ e } 2730 : 210 = 13,$$

avremo:

$$\frac{1470}{2730} = \frac{7}{13}.$$

Accade sovente che vogliansi paragonare due o più frazioni, onde formarsi un'idea giusta della loro grandezza relativa. Ciò riesce difficile quando i loro termini sono diversi e molto grandi. Ad esempio, non si potrà, a prima vista, percepire se sia più grande $\frac{113}{227}$ o $\frac{79}{149}$. In tal caso si usa di convertire le date frazioni in altre equivalenti e che abbiano lo stesso denominatore. Allora la semplice ispezione dei numeratori basta a chiarire ogni dubbio.

Per ridurre due frazioni allo stesso denominatore, si potrà evidentemente moltiplicare i due termini di ciascuna di esse pel denominatore dell'altra. Con ciò si raggiungerà lo scopo prefisso senza alterarne il valore.

ESEMPIO: Frazioni date $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$.

Trasformazione: $\frac{5 \times 9}{8 \times 9}$, $\frac{4 \times 8}{9 \times 8}$;

ossia: $\frac{45}{72}$, $\frac{32}{72}$.

Se le frazioni fossero più di due potrebbesi moltiplicare i termini di ognuna pel prodotto dei denominatori di tutte le altre. Il comun denominatore sarà il prodotto di tutti i denominatori dati.

ESEMPIO: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$.

Frazioni nuove:

$$\frac{1 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}, \frac{2 \times 2 \times 4 \times 5 \times 6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6},$$

$$\frac{3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}, \frac{4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}, \frac{5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6};$$

ovvero effettuati i calcoli:

$$\frac{360}{720}, \frac{480}{720}, \frac{540}{720}, \frac{576}{720}, \frac{600}{720}.$$

L'operazione che abbiamo indicata prende il nome di *riduzione allo stesso denominatore*.

È evidente che a paragonare più frazioni, si potrebbe anche impiegare la riduzione allo stesso numeratore.

Essa si effettuerà in modo analogo, moltiplicando cioè i termini di ogni frazione pel prodotto dei numeratori di tutte le altre. Il numeratore comune sarà il prodotto di tutti i numeratori dati.

Così riprendendo l'esempio di sopra, avremo per le frazioni ridotte:

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}, \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{3 \times 1 \times 3 \times 4 \times 5}, \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{4 \times 1 \times 2 \times 4 \times 5},$$

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{5 \times 1 \times 2 \times 3 \times 5}, \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{6 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4};$$

e fatte le moltiplicazioni :

$$\frac{120}{240}, \frac{120}{180}, \frac{120}{160}, \frac{120}{150}, \frac{120}{144}.$$

Nella pratica si adotta più comunemente la riduzione allo stesso denominatore, perchè come vedremo essa serve ad effettuare in modo prontissimo l'addizione e sottrazione delle frazioni.

In molti casi la riduzione delle frazioni al medesimo denominatore è suscettibile di essere semplificata per ciò che ha rapporto al denominatore comune. E infatti quando fra i dati denominatori vi siano dei fattori comuni, si potrà ottenere un comun denominatore molto più piccolo di quello rintracciato col metodo precedente, cercando cioè il minimo loro multiplo. In allora, ad effettuare la riduzione, converrà moltiplicare i due termini di ogni frazione per i rispettivi quozienti della divisione di questo minimo multiplo per i singoli denominatori.

Ritornando anco una volta all'esempio sopra esposto e trovato che 60 è il minimo multiplo di 2, 3, 4, 5, 6, dovremo moltiplicare i due termini di ogni frazione rispettivamente

per: $60 : 2, 60 : 3, 60 : 4, 60 : 5, 60 : 6,$

ossia per: $30, 20, 15, 12, 10,$

ed avremo: $\frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}, \frac{50}{60}.$

§ 5.

Le quattro operazioni fondamentali sulle frazioni e sui numeri intieri congiunti a frazioni.

Quando si hanno frazioni da addizionare o sottrarre, si comincia col ridurle al medesimo denominatore. Espri-
mendo allora tutte svariate ripetizioni della stessa parte dell'unità, potremo sommarne o sottrarre i numeratori, e così ottenere i chiesti risultati.

ESEMPIO: Vogliasi sommare $\frac{1}{2}$ con $\frac{2}{3}$.

Avremo: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6},$

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{2}{9} = \frac{54}{90} + \frac{9}{90} + \frac{20}{90} = \frac{83}{90},$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15},$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{15}{30} + \frac{6}{30} - \frac{10}{30} = \frac{11}{30}.$$

Se alle frazioni vanno uniti degli intieri, si potranno indifferentemente ridurli tutti in frazioni, ossivvero sommare e sottrarre separatamente frazioni e intieri.

ESEMPIO:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{3}{5} + 1 \frac{1}{4} - 2 \frac{1}{2} + 4 \frac{1}{3} = \\ & (2 + 1 - 2 + 4) + \frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \\ & 5 + \frac{36 + 15 - 30 + 20}{60} = 5 + \frac{41}{60}. \end{aligned}$$

Oppure può stabilirsi:

$$\begin{aligned} & \frac{13}{5} + \frac{5}{4} - \frac{5}{2} + \frac{13}{3} = \\ & \frac{156 + 75 - 150 + 260}{60} = \frac{341}{60} = 5 + \frac{41}{60}. \end{aligned}$$

Moltiplicare una quantità per una frazione, significa prenderne il numero di parti espresso appunto da questa frazione. Così moltiplicare $\frac{1}{2}$ per $\frac{3}{4}$, vorrà dire prendere tre quarte parti di $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ è il moltiplicando, $\frac{3}{4}$ il moltiplicatore ed il risultato che si cerca il prodotto.

La data definizione serve a trovare prontamente il prodotto di due frazioni. Sia per esempio:

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}.$$

Se noi volessimo la quarta parte di $\frac{1}{2}$, dovremmo, per ciò che è cognito moltiplicare il denominatore 2 per 4 e avremo allora questa parte eguale ad $\frac{1}{8}$, ma come invece di 1 ne vogliamo 3 quarte parti, moltiplicheremo il numeratore 1 della frazione $\frac{1}{8}$ per 3, ed avremo pel prodotto cercato $\frac{3}{8} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4}$.

E così:

Per moltiplicare due frazioni basta moltiplicarne rispettivamente numeratore e denominatore.

ALTRI ESEMPLI:

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20},$$

$$\frac{8}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{56}{72} = \frac{7}{9}.$$

Se si hanno da moltiplicare più di due frazioni, si eseguono le operazioni successivamente una dopo l'altra.

Così:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \\ & \frac{2 \times 3}{5 \times 4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{2 \times 3 \times 1}{5 \times 4 \times 2} \times \frac{2}{7} = \frac{2 \times 3 \times 1 \times 2}{5 \times 4 \times 2 \times 7} = \frac{12}{280} = \frac{3}{70}. \end{aligned}$$

E perciò:

Per moltiplicare più frazioni fra loro, se ne moltiplicano rispettivamente numeratori e denominatori.

Da ciò risulta che si può a volontà, in un prodotto di più frazioni, invertire l'ordine dei fattori. Difatto i prodotti parziali dei numeratori e denominatori rimarran sempre gli stessi.

Quando si moltiplicano due frazioni propriamente dette il prodotto vien sempre ad esser minore del moltiplicando. Ciò è evidente ove si rifletta alla definizione data della moltiplicazione.

Se alle frazioni vanno congiunti degli intieri ridottili dapprima in frazione, si procederà in modo identico a quello insegnato. Così:

$$\left(3 + \frac{2}{5}\right) \times \left(4 + \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{5} \times \frac{13}{3} = \frac{221}{15} = 14 + \frac{11}{15}.$$

Si può pure operare diversamente osservando che:

$$\begin{aligned} & \left(3 + \frac{2}{5}\right) \times \left(4 + \frac{1}{3}\right) = \\ & 3 \times 4 + \frac{2}{5} \times 4 + 3 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = 12 + \frac{8}{5} + \frac{3}{3} + \frac{2}{15} = \\ & 12 + \frac{24}{15} + \frac{15}{15} + \frac{2}{15} = 12 + \frac{41}{15} = 14 + \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

Dividere una frazione per un'altra, significa trovare una terza frazione che moltiplicata per la frazione divisore, produca la frazione dividendo.

Abbiassi, per esempio, $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$.

Se noi conoscessimo il quoziente moltiplicandolo per $\frac{3}{4}$, ossia prendendone i $\frac{3}{4}$, dovremmo riprodurre $\frac{2}{5}$. Quindi se noi ne prendiamo invece un solo quarto, otterremo il terzo di $\frac{2}{5}$, terzo che sappiamo essere $\frac{2}{15}$. Dunque il quarto del quoziente equivale a $\frac{2}{15}$, e perciò, in definitiva, il quoziente sarà 4 volte $\frac{2}{15}$, ovvero $\frac{8}{15} = \frac{2 \times 4}{5 \times 3}$. Da questo ragionamento risulta la seguente regola generale:

Dividere due frazioni, equivale a moltiplicare la frazione dividendo per quella divisore rovesciata.

ESEMPLI:

$$\frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{21};$$

$$\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8};$$

$$\frac{3}{10} : \frac{9}{20} = \frac{3}{10} \times \frac{20}{9} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}.$$

Ove alle frazioni fossero congiunti degli intieri, è forza nella divisione ridurli in frazioni prima di poterla effettuare.

ESEMPLI:

$$2 \frac{1}{5} : 3 \frac{1}{4} = \frac{11}{5} : \frac{13}{4} = \frac{44}{65};$$

$$4 \frac{2}{3} : 3 \frac{3}{4} = \frac{14}{3} : \frac{15}{4} = \frac{56}{45} = 1 + \frac{11}{45}.$$

§ 6.

Frazioni decimali. Loro principali proprietà. Le quattro operazioni fondamentali sui decimali.

Allorquando esponemmo il sistema di numerazione decimale, stabilimmo il relativo valore delle cifre di dieci in dieci volte più grande a partire dalle unità e progredendo da destra verso sinistra. Per analogia niente ci impedisce di situare alla destra delle unità altre cifre che decrescano di dieci in dieci nel valore relativo. Solo si avrà cura di interporre, fra la prima di esse e le unità, un segno qualunque, onde distinguerle dagli intieri. I numeri così formati chiamansi *numeri decimali*. Il segno adottato per separarli dalle unità consiste in una virgola. La prima cifra dopo di essa rappresenta *decimi*, la seconda *centesimi*, la terza *millesimi*, ec.,

ESEMPIO: 37,541 significherà 37 unità, 5 decimi, 4 centesimi e 1 millesimo. Esso equivale per la sua definizione alla frazione:

$$\frac{37541}{1000}, \text{ ovvero } 37 + \frac{541}{1000}.$$

Ordinariamente per leggere i decimali, si enuncia prima la parte intiera e quindi la decimale, dividendola in classi di tre in tre cifre a partire dalla virgola e verso destra.

ESEMPIO: 528,375814, si legge:

528 unità, 375 millesimi e 814 milionesimi.

81,09273, leggesi:

81 unità, 92 millesimi e 73 centomillesimi.

Si possono scrivere a destra di un numero qualunque decimale quanti zeri si vogliono, senza alterarne il valore.

Difatto con quest'aggiunta non si modificherà minimamente nè il valore assoluto, nè quello relativo delle singole cifre.

ESEMPIO: $3,51 = 3,510 = 3,5100$, ec.

Ciò risulta anche chiaro, osservando che:

$$3,51 = 3 + \frac{51}{100} = 3 + \frac{510}{1000} = 3 + \frac{5100}{10000}, \text{ ec.}$$

Per rendere un numero decimale dieci, cento, ec., volte più grande o più piccolo, basta trasportare la virgola uno, due, tre, ec., posti a destra o sinistra.

Sia, per esempio, il numero 518,891, che si vuol rendere 100 volte più grande. Abbiamo:

$$518,891 \times 100 = \frac{518891}{1000} \times 100 = \frac{518891}{10} = 51889,1,$$

come volevasi provare.

Eguualmente:

$$518,891 : 100 = \frac{518891}{1000} : 100 = \frac{518891}{100000} = 5,18891.$$

Quando per mancanza di cifre significative non si può compiere l'indicato trasporto, vi si supplisce aggiungendo dapprima a destra o a sinistra, secondo i casi, un numero conveniente di zeri.

ESEMPIO: $51,37 \times 10000$.

Osservando che 51,37 può anche scriversi 51,3700, avremo per il risultato richiesto 513700.

Eguualmente, avendo $51,37 : 10000$ scritto 51,37 sotto la forma :

$$00051,37,$$

avremo per il risultato della divisione:

$$0,005137.$$

Un'unità decimale di un ordine qualsiasi è sempre maggiore della somma dei numeri espressi dalle cifre che la seguono.

Se, per esempio, si ha 0,347, ec., qualunque sia e per quanto grande si supponga essere il numero delle cifre che seguono il 7, riunite insieme, esse non giungeranno mai a

formare un millesimo. Difatti supposto che abbiano tutte il valore massimo di 9, la prima rappresenterà $\frac{9}{10}$ di un millesimo e differirà da questo di un diecimillesimo. Tra questo residuo e la seconda cifra correrà un centomillesimo e così di seguito, per guisa che sebbene, coll'aumentare delle cifre, la differenza in meno da un millesimo vada sempre a diminuire, non potrà mai divenir nulla.

Questa proprietà conduce alla conseguenza importante che *un numero non può esprimersi in due modi diversi per mezzo di decimali*. E invero se due cifre qualunque sono diverse, questa differenza non potrà mai compensarsi in nessuna guisa per mezzo delle altre, e così le due espressioni rappresenteranno in realtà numeri differenti.

La definizione che abbiain data dei numeri decimali mostra che la loro addizione e sottrazione potranno effettuarsi come quelle degli intieri, aggruppando cioè le unità intiere o frazionarie dello stesso ordine. Solo per facilità, ove gli ultimi ordini decimali mancassero in qualche numero, potranno esser suppliti da zeri.

ESEMPIO: Vogliansi sommare:

$$2,898 - 5,41 \text{ e } 7,1893.$$

Si disporranno i tre numeri, un sotto l'altro, in modo che le virgole corrispondano; si supplirà, se si crede, con zeri alle cifre mancanti e si farà la somma.

	Senza supplire ai vuoti con zeri.
2,8980	2,898
5,4100	5,41
7,1893	7,1893
Resultato . . . 15,4973 15,4973.

Sottrazione. ESEMPIO:

$$\begin{array}{r} 51,898 - 43,225 \\ \underline{43,225} \\ \text{Resto. . . } 8,673 \end{array}$$

ALTRO ESEMPIO: 7, 18 — 5, 98754.

$$\begin{array}{r} 7, 18000 \\ 5, 98754 \\ \hline \text{Resto. . . } 1, 19246. \end{array}$$

Abbiansi ora due decimali da moltiplicare fra loro, per esempio, $5, 83 \times 3, 712$.

Noi abbiamo:

$$\begin{aligned} 5, 83 \times 3, 712 &= \frac{583}{100} \times \frac{3712}{1000} = \frac{583 \times 3712}{100000} = \\ &= \frac{2164096}{100000} = 21, 64096. \end{aligned}$$

Esaminando bene il processo seguito, se ne conclude la regola generale che *per moltiplicare due numeri decimali, un per l'altro, si deve effettuare il prodotto, astrazione fatta dalla virgola, e quindi separare a destra del risultato tante cifre quante ve ne sono nei due fattori presi insieme.*

ESEMPIO:

$$\begin{array}{r} 7, 815 \times 0, 025 \\ \hline 39075 \\ 15630 \\ \hline \text{Prodotto. . . } 0, 195375. \end{array}$$

Nella divisione dei decimali possono darsi due casi, che, cioè il divisore, sia un numero intero, ovvero un decimale qualsiasi.

1.° Debba dividersi, per esempio, 18, 937 per 43.

Il dividendo equivale a 18937 millesimi; dunque dividendo quest'ultimo numero per 43, il risultato che si cerca verrà espresso in millesimi e sarà, nel caso nostro, 440 millesimi, più $\frac{17}{43}$ di millesimo, ossia:

$$0, 440 + \frac{17}{43000}.$$

In generale per *dividere un numero decimale per un intero, si effettua la divisione come se il dividendo fosse intero e si*

separano alla destra del quoziente tante cifre decimali, quante ne contiene il dividendo.

Rimane però un residuo ed il quoziente esatto non può ottenersi se non che esprimendolo mediante una frazione ordinaria.

2.° Sia $2,2153 : 0,95$.

Aggiungendo, al numero che conta meno decimali, tanti zeri quanti ne occorrono per pareggiare le cifre, avremo:

$$2,2153 : 0,9500 = \frac{22153}{10000} : \frac{9500}{10000} = \frac{22153}{9500}.$$

Per dividere due decimali l'uno per l'altro, se ne pareggiano le cifre coll'aggiunta di zeri e si effettua quindi la divisione come se fossero intieri.

Nell'esempio surriferito, si avrà il quoziente intiero di 2 e il resto di 3153, ossia il quoziente esatto di $2 + \frac{3153}{9500}$.

È bene di far riflettere che mentre nelle prime tre operazioni il risultato vien sempre espresso in decimali, nella divisione si presenta generalmente, meno singoli casi, sotto la forma di frazione ordinaria. A questo inconveniente si supplisce in parte, mediante la riduzione delle frazioni ordinarie qualunque in decimali.

§ 7.

Conversione di una frazione ordinaria in decimale e reciprocamente.

L'osservazione fatta in proposito della divisione dei decimali, mostra a prima vista l'importanza della ricerca di un metodo atto alla trasformazione delle frazioni ordinarie in decimali.

Abbiassi, per esempio, la frazione $\frac{5}{11}$. Noi già sappiamo che essa rappresenta il quoziente della divisione di 5 unità per 11 e immaginando ogni unità divisa in 10 decimi, il quoziente che danno 50 decimi divisi per 11 equivalente a 4 decimi, più un resto espresso dalla frazione $\frac{6}{11}$ di decimo.

Abbiamo dunque la prima cifra decimale 4 della trasformazione cercata. Nulla ora osta a che si prosegua collo stesso metodo convertendo così 6 decimi in 60 centesimi e dividendo per 11, e così di seguito.

Possiamo dunque enunciare la seguente regola:

Per ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale, si scriverà al quoziente uno zero colla virgola a destra e ciò per tenere il posto delle unità, quindi si aggiungerà uno zero alla destra del numeratore e si dividerà pel denominatore; il quoziente esprimerà decimi: aggiungendo un altro zero al resto e dividendo, si trovano centesimi; si continuerà così finchè siasi ottenuto un sufficiente numero di decimali, secondo l'approssimazione che si desidera o come richiede l'indole del problema.

Nella pratica, l'operazione si dispone come nei due esempj qui sotto:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 20 \\ 100 & 0,35 \\ 00 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 700 & 11 \\ 40 & 0,6363, \text{ ec.} \\ 70 & \\ & 40, \text{ ec.} \end{array}$$

Può accadere dopo un certo numero di divisioni che si giunga ad un resto zero; in tal caso la riduzione potrà farsi esattamente, altrimenti non può essere ottenuta che in modo approssimativo. È utile adunque il ricercare a priori e mediante l'ispezione dei termini della data frazione quando si verifichi l'uno, ovvero l'altro dei due casi mentovati.

Qualunque frazione che abbia un denominatore nel quale entrano i soli fattori primi 2 e 5, può ridursi esattamente in decimali.

È chiaro difatti che l'aggiunta successiva di zeri al dividendo equivalendo a moltiplicarlo per 10 che è eguale a 2×5 , dopo un certo numero di operazioni successive, dovranno distruggersi gli stessi fattori che soli compongono il denominatore e allora il residuo sarà zero di necessità. Così volendo ridurre in decimali la frazione $\frac{3}{100}$, siccome:

$$100 = 2^2 \times 5^2 \text{ e } 10 = 2 \times 5,$$

dopo l'aggiunta di due zeri la divisione si effettuerà esattamente, ciò che ha luogo in realtà.

Qualunque frazione il cui denominatore contenga un fattore primo, diverso dal 2 e dal 5, non può convertirsi esattamente in decimali.

Difatto per quanti zeri successivamente si aggiungano, la divisione non potrà mai compiersi esattamente e si prolungherà perciò senza limite. Ed allora siccome il resto della divisione è sempre minore del divisore, così il numero dei resti fra loro disuguali, non potrà mai sorpassare quello delle unità contenute nel divisore, meno una, e quindi dopo, al più, un tal numero di divisioni, si dovrà ricadere in uno dei resti trovati in precedenza. Sovente invece vi si ricadrà molto prima. Dall'ultimo resto riprodotto in poi, l'aggiunta successiva delle cifre condurrà a ripetere in modo identico le fatte operazioni, e così tutte le cifre verranno a riprodursi indefinitamente per periodi più o meno lunghi.

Le frazioni decimali così risultanti diconsi *periodiche* e si distinguono in *periodiche semplici* e *miste*, secondo che il periodo ha principio subito dopo la virgola, o al contrario quando le prime cifre non ne fanno parte.

ESEMPII:

0,17854178, ec.,

è periodica semplice;

0,23487487, ec.,

è periodica mista.

Suppongasì ora che sia data una frazione decimale periodica e che si voglia rintracciarne la generatrice.

Possono darsi due casi, cioè:

1.° La frazione periodica è semplice come, ad esempio:

0,354354, ec.

Noi osserveremo che per moltiplicare questa frazione per 1000, vale a dire per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del periodo, basta trasportare la virgola tre posti a destra. Avremo quindi l'identità:

$$1000 \times 0,354354, \text{ ec.}, = 354,354, \text{ ec.},$$

nella quale il periodo estendesi indefinitamente da ambe le parti.

Sottraendolo adunque da queste due parti, rimarrà:

$$999 \times 0,354354, \text{ ec.}, = 354,$$

donde:

$$0,354354, \text{ ec.}, = \frac{354}{999};$$

vale a dire che la frazione ordinaria generatrice di una periodica semplice, è data dal periodo preso per numeratore e da un denominatore composto di tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Dal fin qui detto ne emerge che i denominatori così formati non ammettono mai per divisori nè il 2, nè il 5.

2.° *La frazione è periodica mista.*

Sia ad esempio la frazione:

$$0,51379379, \text{ ec.}$$

Convertendo in frazione ordinaria, il periodo semplice l'avremo sotto la forma $51 + \frac{379}{999}$, e riducendo al medesimo denominatore:

$$\frac{51(1000 - 1) + 379}{99900} = \frac{51379 - 51}{99900},$$

il che prova che la generatrice di una frazione periodica mista ha per numeratore il numero formato dalla parte non periodica, seguito da un periodo il tutto diminuito del numero che rappresenta la parte non periodica e per denominatore un altro numero composto da tanti nove quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre fuori di periodo.

L'ispezione della frazione generatrice mostra che il suo denominatore è multiplo del 10, vale a dire, contiene più volte i fattori primi 2 e 5, insieme ad altri provenienti dalla parte costituita dai 9. Combinando questa osservazione con quella fatta antecedentemente, se ne deduce:

1.° *Affinchè una frazione irriducibile, convertita in decimali, produca una frazione periodica semplice, è necessario che il suo denominatore non sia divisibile nè per 2, nè per 5;*

2.° *Affinchè una frazione irriducibile, ridotta in decimali, produca una frazione periodica mista, è necessario che il suo*

denominatore ammetta almeno una volta i fattori primi 2 e 5 o uno dei due congiunti ad altri fattori primi.

Quando si riduce in decimali una frazione ordinaria, per esempio, $\frac{4}{11}$ può esser richiesto di spingere l'approssimazione fino a una determinata cifra decimale, per esempio, nel nostro caso, la quarta. Avendosi allora $\frac{4}{11} = 0,3636$, ec., siccome la quinta cifra sarebbe il numero 3, minore di 5, ne consegue che il valor più prossimo al vero sarà 0,3636 a meno di un diecimillesimo. Ma se invece l'approssimazione dovesse limitarsi a sole tre cifre è chiarissimo che il valore 0,364 è più vicino alla verità dell'altro 0,363. E perciò ne concludiamo che *ad ottenere un' approssimazione qualsiasi per un determinato numero di cifre decimali, basta prendere il valore somministrato dai calcoli quando la prima cifra fra quelle che si trascura è minore del 5 e invece accrescere di un' unità l' ultima cifra del valore medesimo quando la susseguente superi il numero 5.*

ESEMPIO:

$$\frac{3}{7} = 0,4285714, \text{ ec.,}$$

a meno di un centesimo è 0,43, e a meno di un centomillesimo 0,42857.

§ 8.

Addizione e sottrazione dei numeri complessi ridotti in frazione ordinaria.

Si chiamano *numeri complessi* quei numeri che rappresentano misure convenzionali, nelle quali, le parti aliquote e multipli dell'unità, non sono espresse mediante il sistema decimale. Così, per esempio, la *tesa* antica, misura di lunghezza francese, era divisa in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee* e la linea in 12 *punti*. Quindi il numero due tese, 3 piedi, 7 pollici e 10 linee è un numero complesso. In simil guisa, il giorno dividendosi in 24 ore, l'ora in 60 minuti e il minuto in 60 secondi, la quantità 5 ore, 40 minuti e 10 secondi, rappresenta un numero complesso.

Dato un numero complesso, convertirlo in frazione.

I numeri complessi, di cui in oggi occorre occuparsi, essendo quelli che si riferiscono alle divisioni del tempo e della circonferenza, noi sceglieremo fra questi gli esempi principali.

Sia dunque il numero:

giorni 3, ore 10, minuti 17, secondi 48,

da ridursi in frazione ordinaria del giorno. Osservando che il giorno stesso è di 24 ore, ne verrà che 10 ore saranno $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ di giorno. L'ora essendo di 60 minuti, il minuto risulta di $\frac{1}{60}$ di ora e perciò di $\frac{1}{60 \times 24}$ di giorno e quindi 17 minuti equivalgono a $\frac{17}{1440}$ del giorno stesso. Infine il secondo è $\frac{1}{60}$ di minuto, $\frac{1}{60 \times 60} = \frac{1}{3600}$ di ora è $\frac{1}{3600 \times 24} = \frac{1}{86400}$ di giorno; perciò 48 secondi son $\frac{48}{86400} = \frac{1}{1800}$ sempre del giorno. Sommando adunque 3 con $\frac{5}{12}$, $\frac{17}{1440}$ e $\frac{1}{1800}$ il risultato $3 + \frac{9267}{21600} = 3 + \frac{3089}{7200}$ esprimerà il numero complesso proposto tradotto in frazione ordinaria.

Si può anche procedere alla stessa riduzione in altra guisa. L'ora essendo di 60 minuti, 10 ore, resultano di $60 \times 10 = 600$ minuti, ai quali aggiunti i 17 che si riscontrano nel dato numero complesso, formasi un totale di 617 minuti, equivalenti a $617 \times 60 = 37020$ secondi. Se a questa ultima cifra si aggiungono 48 secondi, pure esistenti nel numero dato, si forma per le parti inferiori al giorno, un complessivo totale di 37068 minuti secondi.

Ora il giorno è 24 ore, ovvero $24 \times 60 = 1440$ minuti, o anche $1440 \times 60 = 86400$ secondi. Perciò il numero complesso sarà in definitiva:

$$\text{giorni } 3 + \frac{37068}{86400} = 3 + \frac{3089}{7200},$$

come già si era trovato di sopra.

Quest'ultimo modo di riduzione è il più semplice e per ciò il più usitato.

Nella pratica l'operazione si dispone come appresso:

$$\text{giorni } 3, 10, 17, 48 = 3 + \frac{37068}{86400}.$$

$\begin{array}{r} 60 \\ \hline 600 \\ 17 \\ \hline 617 \times 60 \\ \hline 37020 \\ 48 \\ \hline 37068. \end{array}$	$\begin{array}{r} 24 \times 60 \\ \hline 1440 \times 60 \\ \hline 86400. \end{array}$
--	---

Alcuni altri esempi serviranno di esercizio per simili riduzioni.

Siano tese 3, piedi 4, pollici 7, linee 5 e punti 10 da ridurre in frazioni di tesa.

Ecco il prospetto dell'operazione:

Tese 3, 4, 7, 5, 10.

$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 48 \\ 7 \\ \hline 55 \times 12 \\ \hline 660 \\ 5 \\ \hline 665 \times 12 \\ \hline 7980 \\ 10 \\ \hline 7990. \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 12 \\ \hline 72 \times 12 \\ \hline 864 \times 12 \\ \hline 10368. \end{array}$
--	--

Riduzione:

$$\frac{7790}{10368} = \frac{3845}{5184}.$$

Il numero complesso è dunque:

$$\text{tese } 3 + \frac{3845}{5184}.$$

Siano gradi 17° , $41'$, $10''$ da ridurre in frazioni del grado, che si divide in 60 minuti primi, mentre il minuto primo è di 60 secondi.

$$\begin{array}{r} 17^\circ, 41', 10'' \\ \frac{60}{2460} \\ 10 \\ \hline 2470. \end{array} \qquad \frac{60 \times 60}{3600}.$$

Riduzione: $17 + \frac{2470}{3600} = 17 + \frac{247}{360}.$

Ridotti una volta i numeri complessi in frazioni ordinarie, la loro addizione e sottrazione si residua a teorie che ci sono del tutto cognite.

ESEMPLI: Vogliasi sommare:

giorni 3, 5^{ore}, 10^{minuti} e 40^{secondi}.
con 4, 4, 18 e 20

Effettuate le riduzioni convenienti, abbiamo pel primo numero:

$$\text{giorni } 3 + \frac{18640}{86400},$$

e pel secondo: $4 + \frac{15500}{86400}.$

La loro somma sarà dunque:

$$\text{giorni } 7 + \frac{34140}{86400} = 7 + \frac{569}{1440}.$$

Sia invece: gradi 8° , $15'$, $20''$,
— „ 4° , $17'$, $30''$.

Si ha pel primo numero:

$$\text{gradi } 8 + \frac{920}{3600},$$

e pel secondo: $4 + \frac{1050}{3600}.$

Il risultato della sottrazione è dunque:

$$\text{gradi } 3 + \frac{3470}{3600} = 3 + \frac{347}{360}.$$

Se si volesse riportare questo risultato in minuti e secondi, osserveremmo che $\frac{3470}{3600}$ di grado rappresentano 3470 secondi e dividendo per 60, 57 minuti e 50 secondi. Quindi il residuo è anche trasformabile in 3°, 57', 50".

§ 9.

Esposizione del sistema metrico decimale. Principio generale per la conversione delle misure, ovvero modo di determinare il rapporto fra due unità della stessa specie.

Fra i tanti benefizii arrecati all'umanità dalla rivoluzione francese del secolo XVIII, non ultimo per certo si è quello dell'adozione di un semplicissimo sistema per la misura delle principali quantità che occorre esaminare nella pratica e nelle arti. Questo sistema è il *metrico-decimale*.

I vantaggi principali che esso presenta sugli antichi sono:

- 1.° Il far dipendere tutte quante le unità di misura da quella lineare;
- 2.° L'avere quest'unità un rapporto determinato colle grandi divisioni del globo;
- 3.° Il ridurre tutti i calcoli a calcoli decimali, eliminando le lunghe operazioni, che occorre fare sulle frazioni ordinarie e sugli antichi numeri complessi.

La base del sistema è il *metro* che è la diecimilionesima parte del meridiano terrestre, compresa fra il Polo e l'Equatore.

Stabilita per ogni specie di quantità l'unità di misura, se ne formano i multipli o submultipli crescenti o decrescenti di dieci in dieci, onde il nome di decimale al sistema, ec., così per i multipli si aggiungono al nome dell'unità principale le particelle greche *deca*, *etto*, *chilo*, *míria*,

mentre per i submultipli si adottano le latine *deci*, *centi*, *milli*. Così per le misure di lunghezza, avremo:

Unità principale, metro.	1 ^m .
Decametro	10 ^m .
Ettometro	100 ^m .
Chilometro.	1000 ^m .
Miriametro.	10000 ^m .
Decimetro	0 ^m , 1.
Centimetro.	0 ^m , 01.
Millimetro	0 ^m , 001.

Per le misure itinerarie l'unità è il *chilometro*.

Misure superficiali.

L'unità di misura è il *metro quadrato*, vale a dire, il quadrato che ha per lato il metro. Indi ne vengono:

Il decametro quadrato o ara	100 ^{mq} .
L'ettometro quadrato o ettaro	10000 ^{mq} .
Il chilometro quadrato	1000000 ^{mq} .
Il miriametro quadrato.	100000000 ^{mq} .
Il decimetro quadrato.	0 ^{mq} , 01.
Il centimetro quadrato.	0 ^{mq} , 0001.
Il millimetro quadrato	0 ^{mq} , 000001.

L'*ara* e l'*ettaro* son le unità adottate per le misure agrimensorie.

Misure di volume.

L'unità è il *metro cubo*, ossia un cubo del quale ogni spigolo ha un metro di lunghezza. Quando si tratta di misurare del legname o dei fieni, il metro cubo prende il nome di *stero*. I multipli o submultipli del metro cubo sono poco usati.

Misure di capacità.

L'unità di misura è il *litro* del volume di un decimetro cubo. I suoi multipli e submultipli sono il *decalitro*, l'*ettolitro*, il *chilolitro* ed il *decilitro*, *centilitro* e *millilitro*.

Pesi.

Preso 1 centimetro cubo di acqua stillata alla temperatura di 4 gradi centigradi, si forma il *grammo*. E così le misure di peso sono:

Grammo, unità	1 ^{gr} .
Decagrammo	10 ^{gr} .
Ettogrammo	100 ^{gr} .
Chilogrammo	1000 ^{gr} .
Miriagrammo	10000 ^{gr} .
Quintale metrico	100000 ^{gr} .
Tonnellata	1000000 ^{gr} .

È facile scorgere, per poco che si abbia qualche nozione geometrica, come il chilogrammo sia il peso di un litro d'acqua posta nelle condizioni enunciate, mentre la tonnellata è il peso del metro cubo.

Monete.

Se si prende una lega metallica che contenga $\frac{9}{10}$ di argento e se ne toglie una porzione pesante 5 grammi, si ottiene la *lira italiana* o *franco*. Essa si divide in decimi e centesimi. I suoi multipli non hanno nomi particolari; si annoverano fra questi il pezzo da 2 e da 5 lire. I submultipli sono il pezzo da 50 e da 20 centesimi.

Il sistema metrico essendo di un uso comunissimo nella pratica, non sarà inutile il risolvere qualche problema che si riferisca al medesimo.

PROBLEMA 1.º Il peso di un ettolitro di carbone è 82^{ch.}, 7; un sacco di carbone contiene 1 ettolitro e 42 litri; quanto peseranno 3217 sacchi?

SOLUZIONE: L'unità di peso essendo l'ettolitro, ossia 100 litri, ed il volume di un sacco essendo dato da 1^{ett.}, 42; per avere il peso del carbone contenuto in detto sacco converrà moltiplicare 1,42 per 82,7 peso dell'ettolitro. Indi multipli-

cando il risultato ottenuto per 3217, si otterrà in chilogrammi il peso dei 3217 sacchi.

$82,7 \times 1,42$	$117,434 \times 3217$
<hr/> 1654	<hr/> 822038
3308	117434
827	234868
<hr/> 117,434.	<hr/> 352302
	<hr/> 377785,178.

Il peso totale è dunque di chilogrammi 377785 e 178 grammi.

PROBLEMA 2.° Si ha una superficie di are 1,87 da ricuoprirsì di argento e si sa che ogni decimetro quadrato esige per la copertura 8 decigrammi d'argento. Qual sarà la spesa totale?

SOLUZIONE: L'ara essendo 100 metri quadri, are 1,87 equivarranno a 187 metri quadri, ovvero 18700 decimetri quadrati. In conseguenza, il peso dell'argento necessario a ricuoprire questa superficie, verrà dato da $18700 \times 8 = 149600$ decigrammi equivalenti a 14960 grammi. Ora noi sappiamo che ogni 4^{gr.}, 50 d'argento costano 1 franco, e perciò la spesa totale si otterrà dividendo 14960 per 4,50, con che avremo Ln. 3324,44 circa.

PROBLEMA 3.° Sotto un egual volume l'acqua pesa 773 volte più dell'aria. Si dimanda il peso di litri 825,371 di aria?

SOLUZIONE: Se il volume dato fosse d'acqua, siccome ogni litro pesa 1 chilogrammo, si avrebbero chil. 825,371 pel peso chiesto. Ma siccome l'aria pesa a egual volume 773 volte meno dell'acqua, otterremo il peso in quistione col dividere 825,371 per 773. Effettuata l'operazione, si ha per quoziente:

$$\text{chil. } 1,067 = \text{grammi } 1067.$$

Allorquando si hanno delle quantità della medesima specie riferite a diverse unità di misura può esser richiesto

di ridurle da un sistema nell'altro. Questa riduzione si farà facilmente quando si conosca il rapporto che passa fra le unità nei due sistemi. E perciò tutta la quistione si riduce a determinare questo rapporto, lo che è facilissimo, allorchè si sa quanti metri e frazioni di metro valgono le anzidette unità. Un esempio schiarirà la teoria. Abbiansi:

klafter 2, 4^p, 10^p, 10^l,

cioè 2 klafter o tese tedesche, 4 piedi, 10 pollici e 10 linee, sapendosi che il klafter si divide in 6 piedi, il piede in 12 pollici ed il pollice in 12 linee; vogliansi convertire in yard che è tre piedi inglesi, composti ognuno di 12 pollici, i quali ultimi suddividonsi in 10 linee. Cercato nelle tavole di ragguaglio il rapporto delle due unità col metro e trovato che il klafter è:

metri 1, 896

e l'yard:

• 0, 914,

ne verrà che il valore di un klafter in yard si otterrà dalla divisione dei numeri sopra notati e sarà perciò:

$$\frac{1896}{914} = \frac{948}{457} = 2 + \frac{34}{457}.$$

Ora la riduzione in frazione ordinaria del numero complesso proposto, effettuata cogli insegnati metodi, come si vede qui sotto, dando:

klafter 2, 4^p, 10^p, 10^l

$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 48 \\ 10 \\ \hline 58 \times 12 \\ \hline 696 \\ 10 \\ \hline 706. \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 6 \\ \hline 6 \times 12 \\ \hline 72 \times 12 \\ \hline 864. \end{array}$
--	---

$$\text{Klafter } 2 + \frac{706}{864} = 2 + \frac{353}{432},$$

ne consegue che moltiplicando questo numero pel valore del klafter in yard, si sarà ottenuta in yard e frazione ordinaria del medesimo, la riduzione in discorso.

L'operazione dà:

$$2 \frac{34}{457} \times 2 \frac{353}{432} = \frac{948}{457} \times \frac{1217}{432} = \frac{1153716}{197424} =$$

$$\frac{96143}{16452} = 5 + \frac{13983}{16452}.$$

Ove la suindicata frazione di yard volesse ridursi in piedi e pollici, osserveremo che l'yard essendo 3 piedi, $\frac{13983}{16452}$ di yard, equivarranno a:

$$\frac{13983}{16452} \times 3 = \frac{41949}{16452} \text{ di piede,}$$

ossia: piedi $2 + \frac{8745}{16452}$.

Ridotta l'ultima frazione al modo stesso in pollici, verrà:

$$\frac{8745}{16452} \text{ di piede} = \frac{8745 \times 12}{16452} = \frac{104940}{16452} \text{ di pollice,}$$

ovvero: pollici $6 + \frac{6228}{16452} = 6 + \frac{1557}{4113}$.

Al modo stesso:

$$\frac{1557}{4113} = \frac{15570}{4113} \text{ di linea,}$$

ovvero: linee $3 + \frac{3231}{4113}$.

E così definitivamente:

klafter 2, 10, 10, 10,

si trasforma in:

yard 5, 2, 6, 3 $\frac{3231}{4113}$.

Quest'esempio dà una norma sicura per operare in tutti i casi consimili.

§ 10.

Ragioni e proporzioni. Loro principali proprietà.

Per l'esposizione generale di tutte le teorie che si svolgeranno d'ora in avanti sui numeri, ci gioveremo, per comodo, delle lettere algebriche. Così a, b, c, d , ec., significheranno numeri qualunque e perciò nell'applicare il ragionamento ai casi speciali basterà e sarà sufficiente il porre al posto di ogni lettera, nei risultati, il numero che rappresenta, effettuando quindi quelle operazioni che eran rimaste semplicemente indicate.

Ciò premesso si prosegue oltre.

Chiamasi *rapporto aritmetico* di due numeri la loro differenza, ossia l'eccesso del più grande sul più piccolo.

ESEMPIO: 3 è il rapporto aritmetico di 7 a 4 perchè:

$$7 - 4 = 3.$$

Il rapporto aritmetico di due numeri si indica mediante un punto interposto fra i medesimi, scrivesi così $7 \cdot 3$.

Rapporto geometrico invece è il quoziente di due numeri.

ESEMPIO: 4 è il rapporto geometrico di 32 a 8, perchè:

$$32 : 8 = 4.$$

Quando quattro numeri son tali che i loro rapporti aritmetici due e due sono eguali, essi costituiscono una *equidifferenza* o *ragione aritmetica*.

ESEMPIO: 8, 6, 4 e 2 sono in equidifferenza, perchè:

$$8 - 6 = 4 - 2.$$

L'equidifferenza si scrive:

$$8 \cdot 6 : 4 \cdot 2,$$

vale a dire rimpiazzando i segni — con un punto e l'eguale con due. Si enuncia 8 sta a 6 come 4 a 2.

In qualunque equidifferenza la somma dei termini estremi eguaglia quella dei medii.

Abbiassi l'equidifferenza:

$$a \cdot b : c \cdot d,$$

ossia:

$$a - b = c - d.$$

Aggiungendo da ambe le parti la quantità $b + d$, avremo:

$$a - b + b + d = c - d + b + d,$$

ossia:

$$a + d = c + b,$$

come volevasi provare.

Viceversa, se quattro numeri son tali che le loro somme due a due si eguagliano, si può fra questi istituire una o più equidifferenze, prendendoli due a due per estremi o per medii.

Così l'eguaglianza:

$$a + d = c + b,$$

dà luogo alle equidifferenze seguenti:

$$a \cdot b : c \cdot d,$$

$$d \cdot b : c \cdot a,$$

$$a \cdot c : b \cdot d,$$

$$d \cdot c : b \cdot a,$$

$$b \cdot a : d \cdot c,$$

$$b \cdot d : a \cdot c,$$

$$c \cdot a : d \cdot b,$$

$$c \cdot d : a \cdot b.$$

Per provare la verità della prima, sottraggasi dai due membri dell'eguaglianza base, la quantità $b + d$. Avremo:

$$a + d - b - d = c + b - b - d,$$

ovvero:

$$a - b = c - d,$$

o anche:

$$a \cdot b : c \cdot d.$$

La seconda si ottiene colla sottrazione dai due membri della stessa eguaglianza di $a + b$. Si ha:

$$a + d - a - b = c + b - a - b,$$

ossia: $d - b = c - a,$

o anche: $d \cdot b : c \cdot a.$

Operazioni analoghe condurrebbero alle altre sei equidifferenze.

Da ciò si deduce, che, in una proporzione aritmetica, si possono a volontà invertire i medii, invertire gli estremi, ovvero porre i medii al posto degli estremi e viceversa. Queste proprietà risultano chiarissime, ove si rifletta che tutte queste trasposizioni lasciano sempre la somma dei medii eguale a quella degli estremi.

Se i medii sono eguali, l'equidifferenza dicesi *continua*. In questo caso il medio eguaglia la semi-somma degli estremi.

ESEMPIO:

$$6 \cdot 4 : 4 \cdot 2.$$

Per analogia chiamasi *medio aritmetico* di più numeri la somma dei medesimi, divisa pel loro numero. Così il medio aritmetico fra 4, 7 e 5 e 8 sarà:

$$\frac{4 + 7 + 5 + 8}{4} = 6.$$

Dati tre termini di una equidifferenza, si può trovare il quarto incognito. Dettolo x ed essendo a, b, c i termini conosciuti, dovremo avere:

$$a + x = b + c,$$

e perciò: $x = b + c - a.$

ESEMPIO: Siano 8, 7, 6 i tre numeri dati. Avremo:

$$x = 7 + 6 - 8 = 5.$$

Dicesi che quattro numeri sono in *proporzione geometrica* quando il rapporto dei primi due eguaglia quello degli altri due.

Se a, b, c, d sono i numeri dati, dovrà dunque essere:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

eguaglianza che suole scriversi:

$$a : b :: c : d$$

e si enuncia a sta a b come c a d .

ESEMPLI: $12 : 6 :: 8 : 4,$
 $2 : 9 :: 4 : 18.$

Il primo e l'ultimo termine diconsi *estremi*, il terzo e secondo *medii*. Il primo e terzo sono gli *antecedenti*, il secondo e il quarto i *consequenti*.

Quando i due medii sono eguali, la proporzione dicesi *continua* ed invece di scriverla:

$$a : b :: b : c,$$

si scrive: $\div \div a : b : c.$

Il numero b è *medio proporzionale* fra a e c , invece c è *terzo proporzionale* dopo a e b .

In una proporzione qualunque il prodotto degli estremi eguaglia quello dei medii.

Avendosi difatto la proporzione:

$$a : b :: c : d,$$

ossia:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

moltiplichiamo i due membri dell'ultima eguaglianza per $b \times d$; avremo:

$$\frac{a \times b \times d}{b} = \frac{c \times b \times d}{d},$$

e semplicizzando col sopprimere i fattori comuni al numeratore e denominatore:

$$a \times d = b \times c,$$

come volevasi provare.

Da ciò risulta un metodo semplice di trovare il quarto termine di una proporzione di cui sien cogniti gli altri tre. Abbiassi, per esempio:

$$4 : 8 :: 6 : x.$$

Siccome deve essere $6 \times 8 = 4 \times x$, ne verrà dividendo da ambo i lati per 4 che:

$$x = \frac{6 \times 8}{4} = 12.$$

Viceversa, se quattro numeri son tali che i loro prodotti due a due si eguagliano, essi saranno in proporzione:

$$a \times d = b \times c \dots\dots (x).$$

È facile provare che da questa eguaglianza si desumono le otto proporzioni seguenti:

- (1) $\dots\dots a : b :: c : d,$
- (2) $\dots\dots a : c :: b : d,$
- (3) $\dots\dots b : a :: d : c,$
- (4) $\dots\dots b : d :: a : c,$
- (5) $\dots\dots c : a :: d : b,$
- (6) $\dots\dots c : d :: a : b,$
- (7) $\dots\dots d : b :: c : a,$
- (8) $\dots\dots d : c :: b : a,$

Per ottenere difatto la prima, si dividano i due membri dell'eguaglianza (x) per $b \times d$; si ha:

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d},$$

e semplicizzando: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

o anche: $a : b :: c : d.$

Se si volesse invece ottenere, per esempio, la (3), si scrive l'eguaglianza (x) invertita, cioè:

$$b \times c = a \times d,$$

indi dividendo da ambo i lati per $a \times c$, si ha:

$$\frac{b \times c}{a \times c} = \frac{a \times d}{a \times c},$$

ossia:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

o anche:

$$b : a :: d : c.$$

Lo stesso dicasi per tutte le altre.

Dalle verità dimostrate risulta ad evidenza che in una proporzione qualunque si possono invertire i medii, gli estremi e porre i primi al posto dei secondi e viceversa.

Se due proporzioni hanno un rapporto comune, gli altri due rapporti formano proporzione.

Sia:

$$a : b :: c : d,$$

$$e : f :: c : d.$$

Poste le proporzioni sotto forma di eguaglianza dall'essere:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{e}{f} = \frac{c}{d},$$

ne viene:

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f},$$

ossia:

$$a : b :: e : f.$$

Se due proporzioni hanno i medesimi antecedenti, i conseguenti sono in proporzione e viceversa.

Sia:

$$a : b :: c : d,$$

$$a : e :: c : f.$$

Permutando in ambedue i medii, si ha:

$$a : c :: b : d,$$

$$a : c :: e : f,$$

e perciò per la dimostrazione precedente:

$$b : d :: e : f.$$

Viceversa, abbiassi invece:

$$a : b :: c : d,$$

$$e : b :: f : d.$$

Permutando gli estremi viene:

$$d : b :: c : a,$$

$$d : b :: f : e,$$

donde:

$$c : a :: f : e,$$

e ponendo i medii al posto degli estremi:

$$a : c :: e : f,$$

che è ciò che volevasi provare.

In una qualunque proporzione la somma dei primi due termini sta a quella degli altri due, come il primo termine sta al terzo, ovvero come il secondo al quarto.

Abbiasi: $a : b :: c : d \dots \dots (1)$

ovvero: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$

aggiunta l'unità da ambe le parti, ne viene:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1,$$

e riducendo ogni intiero allo stesso denominatore della frazione con cui è sommato:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

e traducendo in proporzione:

$$a + b : b :: c + d : d.$$

invertiti i medii, si ha:

$$a + b : c + d :: b : d \dots \dots (2).$$

Questo risultato dimostra la seconda parte dell'enunciata verità. A provare la prima, si invertano i medii della proporzione (1), con che avremo:

$$a : c :: b : d;$$

si paragoni questa proporzione con l'altra (2) e si otterrà, a motivo del rapporto comune $b : d$:

$$a + b : c + d :: a : c.$$

In qualunque proporzione la differenza dei primi due termini sta alla differenza degli altri due, come il primo termine sta al terzo, ovvero come il secondo al quarto.

Si dimostra in modo analogo a quel che fu fatto di sopra, sottraendo invece di aggiungere l'unità ai due membri dell'eguaglianza:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

In qualunque proporzione la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti, come un antecedente qualunque sta al suo conseguente.

Abbiasi: $a : b :: c : d.$

Si invertano i medii; avremo:

$$a : c :: b : d.$$

Applicando a questa proporzione il teorema in precedenza dimostrato, ne viene:

$$a + c : b + d :: a : b,$$

oppure:

$$a + c : b + d :: c : d.$$

In simil guisa si opererà per la differenza e otterremo:

$$a - c : b - d :: a : b :: c : d.$$

Dal paragone dei risultati ottenuti per somma e per differenza a motivo del rapporto comune $a : b$, oppure $c : d$, si deduce che:

$$a + c : b + d :: a - c : b - d,$$

vale a dire che la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti, come la differenza degli stessi antecedenti sta alla differenza dei conseguenti.

Le operazioni che abbiamo effettuato in ultimo sulle proporzioni, son cognite col nome di *composizione per somma o per sottrazione*.

Moltiplicando termine a termine varie proporzioni, si forma una nuova proporzione.

Abbiassi:

$$\begin{aligned} a &: b :: c : d, \\ a &: f :: g : h, \\ l &: m :: p : q, \end{aligned}$$

ossia: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{c}{f} = \frac{g}{h}, \frac{l}{m} = \frac{p}{q};$

moltiplicando queste eguaglianze membro a membro, si ottiene:

$$\frac{a \times c \times l}{b \times f \times m} = \frac{c \times g \times p}{d \times h \times q},$$

e traducendo in proporzione:

$$a \times c \times l : b \times f \times m :: c \times g \times p : d \times h \times q.$$

Se le proporzioni date fossero tutte eguali, la loro moltiplicazione equivale ad elevare ad una potenza i termini loro, e perciò ne viene che:

Innalzando a potenza tutti i termini di una proporzione, se ne forma una nuova.

Avendosi più frazioni eguali, la somma di tutti i numeratori divisa per quella di tutti i denominatori, forma una nuova frazione eguale in valore alle primitive.

Sia: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}, \text{ ec.,}$

donde: $a : b :: c : d.$

Componendo per somma, ne verrà:

$$a + c : b + d :: a : b,$$

ovvero: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ e perciò anche $= \frac{e}{f},$

da cui: $a + c : b + d :: e : f.$

Componendo ancora:

$$a + c + e : b + d + f :: e : f,$$

ossia: $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{e}{f},$

come volevasi provare, e così si prosegue qualunque sia il numero delle frazioni.

§ 11.

Regola del tre semplice e composta.

Si dice che due quantità son *direttamente* proporzionali, allorchè l'una cresce o decresce nello stesso rapporto dell'altra. Esse sono invece *inversamente* proporzionali, quando al crescere dell'una, l'altra diminuisce nello stesso rapporto.

La proporzionalità di due grandezze è talvolta una semplice deduzione del raziocinio, tal'altra invece dipende da cognizioni scientifiche.

Si capisce, per esempio, immediatamente che il salario di un operaio sia proporzionale al tempo nel quale lavora, mentre invece è il risultato di una dimostrazione fisica la cognizione che i gravi cadendo percorrono spazi che crescono come i quadrati dei tempi impiegati a percorrerli.

La regola del tre è un quesito aritmetico, nel quale conoscendosi il valore di una quantità che è direttamente o inversamente proporzionale a più altre, si cerca il nuovo valore che essa acquista, allorchè le prime subiscono variazioni.

La regola del tre può esser *semplice* o *composta* e di ambedue forniremo degli esempi che indichino come si debba operare per risolverla.

Regola del tre semplice.

La soluzione di questa regola dipende dalla determinazione del quarto termine di una proporzione di cui si conoscono gli altri tre.

PROBLEMA: 172 metri di stoffa son costati 1204 franchi. Quanto costeranno 228 metri?

È chiaro che il prezzo della stoffa è direttamente proporzionale al numero dei metri che se ne prendono e perciò detto x il prezzo incognito cercato, avremo:

$$172 : 1204 :: 228 : x,$$

dopo una virgola, 4 zeri e si estrarrà la radice di 20000.
Siccome:

$$\sqrt{20000} = 141,$$

così: $\sqrt{2}$ a meno di 0,01,

sarà: 1,41.

In simil guisa si troverà:

$$\sqrt{7} \text{ a meno di un millesimo } 2,645.$$

Se si volesse estrarre la radice quadrata da una frazione ordinaria con approssimazione decimale, si comincierebbe al ridurla in decimali fino ad avere tante cifre quante ne occorrono per la richiesta approssimazione. Si opererebbe poscia come di sopra.

Sia: $\sqrt{\frac{3}{11}}$ a meno di 0,01;

siccome: $\frac{3}{11} = 0,2727,$

così la sua radice sarà: 0,52.

Eguualmente la radice quadrata di $\frac{1}{7}$ a meno di un millesimo si troverà essere 0,377.

Radici cubiche.

Si chiama *radice cubica* di un numero, un altro numero che elevato al cubo riproduce il primitivo. Così, per esempio, 2 è la radice cubica di 8, perchè $2^3 = 8$. La radice cubica o terza si indica col radicale $\sqrt[3]{}$.

Dalla data definizione ne consegue che non tutti i numeri possono avere una radice cubica esatta. Si cercherebbe invano, per esempio, un numero che innalzato al cubo riproduca il 9. In tal caso le radici cubiche si estraggono per approssimazione come quelle quadrate.

I cubi de' numeri:

1, 10, 100, 1000, ec.,

essendo rispettivamente:

$$1, 1000, 1000000, \text{ ec.,}$$

ne consegue che viceversa i numeri inferiori al 1000 e perciò di una, due o tre cifre hanno le radici cubiche di una cifra, quelli di 4, 5 e 6 cifre, hanno le radici di due, ec. In generale ad ottenere il numero delle cifre della radice cubica di un numero, basta scomporlo in classi di tre per tre, cominciando dalla destra.

Ciò posto consideriamo il modo col quale viene a formarsi il cubo di un numero composto di diecine e di unità. Noi già sappiamo che:

$$57^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 7 + 7^2$$

e quindi:

$$\begin{aligned} 57^3 &= (50^2 + 2 \times 50 \times 7 + 7^2) (50 + 7) = \\ &= 50^3 + 2 \times 50^2 \times 7 + 50 \times 7^2 + 50^2 \times 7 + 2 \times 50 \times 7^2 \\ &+ 7^3 = 50^3 + 3 \times 50^2 \times 7 + 3 \times 7^2 \times 50 + 7^3; \end{aligned}$$

in altri termini che il cubo di un numero formato di unità e di diecine consta: 1.° del cubo delle diecine; 2.° del triplo prodotto del quadrato delle diecine per le unità; 3.° del triplo prodotto del quadrato delle unità per le diecine; 4.° del cubo delle unità. Questa osservazione ci gioverà immensamente nell'estrazione delle radici cubiche dagli intieri.

Si supponga dapprima che la radice da estrarsi sia solo composta di diecine ed unità, vale a dire che il numero dato non superi le 6 cifre, come sarebbe, per esempio, il 148877. Noi osserveremo che siccome desso contiene il cubo delle diecine della radice, e questo cubo non può esser meno di migliaia, dovrà star compreso nella parte 148, e perciò estraendo la radice dal massimo cubo contenuto nel 148, otterremo le richieste diecine. Nel nostro caso questa radice è 5 e il suo cubo 125. Sottratte 125 da 148 migliaia, il resto 23877 conterrà ancora le altre tre parti del cubo di cui abbiám fatto parola, e prima di tutto il triplo prodotto del quadrato delle diecine per le unità. Questo triplo prodotto non potendo esser meno di centinaia, sarà

contenuto nel 238 e perciò diviso 238 per il triplo quadrato di 5 che è 75, il quoziente 3 rappresenterà la cifra delle unità della radice, ovvero una cifra troppo forte, giacchè nel 238 entrano anche due altre parti di cui non ci siamo occupati. Per provare se il 3 è o non è la cifra giusta, si fa il cubo di 53, se questo risulta minore o eguale al 148877, come avviene nel nostro caso, il 3 è esatto; altrimenti conviene diminuirlo di un'unità, e ripetere la prova.

L'operazione pratica è disposta come si vede qui sotto:

148877	53	cubo di . . . 53
125	75.	53
<hr style="width: 100px; margin: 0;"/> 23877		<hr style="width: 100px; margin: 0;"/> 159
00000.		265
		<hr style="width: 100px; margin: 0;"/> 2809 × 53
		8427
		14045
		<hr style="width: 100px; margin: 0;"/> 148877.

Sia ora un numero qualunque come, per esempio, 1953125. Qualunque sia il numero delle cifre della sua radice, nulla osta a che la si consideri composta di diecine ed unità, ed allora il cubo risulterà formato, come fu già indicato, e solo le diecine della radice saranno più di dieci. Ciò posto, il cubo di queste diecine non potendo dar meno di migliaia, sarà compreso nella parte 1953, in guisa che estraendo la radice dal massimo cubo che entra nel 1953, otterremo le diecine cercate. Ora siccome il 1953 ha meno di sei cifre, la sua radice si può estrarre coi metodi cognitivi, e si troverà essere 12, dunque la radice totale ha 12 diecine. Fatto il cubo di 12 che è 1728, e sottrattolo da 1953, il resto di 225125 conterrà ancora altre tre parti del cubo totale. Fra queste il triplo prodotto del quadrato delle diecine per le unità dando almeno centinaia sta nella parte 2251, e perciò fatto il quadrato di 12 che è 144 moltiplicatolo per 3, con che viene 432, e diviso 2251 per 432, il quoziente 5 sarà al solito la cifra delle unità, oppure una cifra troppo forte. Per

farne la prova si effettua il cubo di 125, e siccome nel nostro caso risulta appunto eguale a 1953125, così 125 è esattamente la radice cubica cercata.

L'operazione pratica si dispone come qui sotto; i cubi ed i tripli quadrati son eseguiti a parte:

$$\begin{array}{r|l} 1953125 & 125 \\ 953 & 3 \\ 225125 & 432. \\ 00000. & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Cubo di } \dots\dots 12 \\ 12 \\ \hline 144 \times 12 \\ 1728 \\ \text{cubo di } \dots\dots 125 \times 125 \\ \hline 625 \\ 250 \\ 125 \\ \hline 15625 \times 125 \\ 78125 \\ 31250 \\ 15625 \\ \hline 1953125. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Cubo di } 1 \\ 1 \\ \hline 1 \times 1 \\ \hline 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Triplo quadrato di } 12 \\ 12 \\ \hline 144 \times 3 \\ \hline 432. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Triplo quadrato di } 1 \times 3 \\ \hline 3. \end{array}$$

Generalizzando il metodo impiegato in quest'esempio si giunge alla regola che segue:

Per estrarre a meno di un'unità la radice cubica da un numero intero, si comincia a decomporlo in classi di tre cifre

cominciando da destra; il numero di queste classi di cui l'ultima può contenere solamente una o due cifre è eguale a quello delle cifre della radice.

La prima cifra della radice è la radice cubica a meno di una unità del numero espresso dall'ultima classe.

Dopo avere ottenuto questa prima cifra, si forma il cubo e si toglie dalla prima classe; a destra del resto si scrive la seconda classe e si divide il risultato nelle sue centinaia pel triplo quadrato della diecina della prima cifra trovata. Il quoziente è uguale o superiore alla seconda cifra.

Si prova l'esattezza della cifra trovata scrivendola a destra della prima e facendo il cubo del numero risultante. Se esso può togliersi dalle prime due classi, la cifra provata è esatta: altrimenti occorre diminuirla di un'unità.

Alla destra del resto ottenuto, quando si è riscontrata una cifra esatta, si scrive la terza classe e si dividono le centinaia del numero formato pel triplo quadrato dell'insieme delle prime due cifre della radice, il quoziente è eguale o maggiore della terza cifra.

Si prova questa terza cifra in un modo analogo alla seconda e si prosegue così fino all'ultima classe del numero. Si sottintende che, quando si trova un resto finale, la radice ottenuta è approssimata a meno dell'unità.

Volendo estrarre la radice cubica da una frazione, dovrà naturalmente estrarsi dal numeratore come dal denominatore, e ciò perchè viceversa l'elevazione a cubo di una frazione implica quella dei suoi due termini.

$$\text{Così:} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5},$$

$$\sqrt[3]{\frac{7}{28}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{28}} = \frac{1}{3} \text{ circa.}$$

Se non che generalmente si usa di rendere il denominatore della frazione un cubo perfetto. Così, per esempio,

avendosi $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$, osserveremo che moltiplicando i due termini della frazione per $7^3 = 49$, si ha:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt[3]{245}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{6}{7},$$

e siccome prendendo per il valore della radice la quantità $\frac{7}{7}$ essa risulta troppo forte, così ne consegue che il valore $\frac{6}{7}$ è approssimato a meno di $\frac{1}{7}$.

Se si vuole estrarre la radice da un numero decimale, considerandolo come frazione, si dovrà prima rendere il numero delle sue cifre decimali multiplo del tre mediante l'aggiunta di zeri e quindi estrarre la radice dal numero totale considerato come intero, avendo cura di separare in questa radice tante cifre decimali quante sono le classi di tre che entravano nel numero predisposto.

$$\sqrt[3]{18,51} = \sqrt[3]{18,510} = 2,6 \text{ a meno di } 0,1;$$

$$\sqrt[3]{51,1} = \sqrt[3]{51,100} = 3,7 \quad \text{id.}$$

Una simil teoria è applicabile all'estrazione delle radici cubiche dagli interi fino ad una certa approssimazione. Volendosi, per esempio, la radice cubica del 2 a meno di un centesimo, siccome due cifre della radice corrispondono a sei nel cubo, aggiungeremo al 2 dopo una virgola sei zeri, ed avremo allora:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2000000},$$

e fatta l'operazione:

$$\sqrt[3]{2} = 1,26, \text{ a meno di } 0,01.$$

Eguualmente volendosi estrarre la radice cubica di una frazione ordinaria con approssimazione decimale, convien prima ridurre la frazione in decimali con quel numero di

cifre che è necessario, onde ottenere l'approssimazione dimandata.

ESEMPIO: $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ a meno di un centesimo; $\frac{4}{5} = 0,800000$

e perciò $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{0,800000}$, ossia $= 0,92$.

Le radici quadrate e cubiche che non si possono estrarre esattamente, son cognite in aritmetica sotto il nome di *numeri irrazionali*.



PROGRAMMA SECONDO

GEOMETRIA

§ 1.

Nozioni preliminari, definizioni e conseguenze immediate
che da queste derivano.

Tutti i *corpi* che si presentano all'esame dei nostri sensi, occupano uno spazio limitato nell'immenso vuoto che costituisce l'universo. La grandezza dello spazio occupato, dicesi *volume* del corpo. I limiti di un corpo, vale a dire quelle parti del medesimo che trovansi in contatto coi corpi vicini, chiamansi *superfici*; i limiti delle superfici diconsi *linee* e le estremità delle linee *punti*. I punti, le linee, le superfici, non esistono realmente in natura, ed alla mente abbisogna un certo sforzo per concepirne l'idea isolata, ma siccome dalle loro proprietà si desumono quelle del corpo che tengon racchiuso, debbono essere esaminate sotto tutti i rapporti.

La *Geometria* è la scienza che si occupa delle proprietà dei corpi e della loro misura, avuto riguardo alla forma e astrazione fatta dalla materia che li costituisce.

Ogni corpo ha tre *dimensioni* denominate *lunghezza*, *larghezza* ed *altezza*, la superficie ne ha due, la linea si estende in un sol senso ed il punto geometrico non ha dimensioni.

Fra due punti, si posson tracciare un infinito numero di linee; la più corta fra le medesime, dicesi *retta*, le altre non lo sono.

Linea spezzata è quella linea che si compone di parti di linee rette.

Linea curva è quella che non è nè retta, nè spezzata.

Una superficie tale che una retta vi coincide in tutta la sua estensione per qualunque senso vi si situi, dicesi *superficie piana* o semplicemente *piano*. Una superficie che è composta di parti di superfici piane, dicesi *spezzata*. Tutte le altre sono *superfici curve*.

Ad indicare geometricamente i punti, le linee, le superfici adoperansi lettere alfabetiche. I punti si rappresentano con una lettera, le linee e superfici mediante le lettere di diversi dei loro punti.

Si suol dividere generalmente la Geometria in due parti; la prima tratta delle figure situate in un piano e dicesi perciò *Geometria piana*; la seconda si occupa delle figure situate in un modo qualunque nello spazio e vien perciò detta *Geometria solida*.

Due figure sono eguali quando si possono far coincidere sovrapponendole l'una sull'altra.

Se in un piano a partire da un punto A (*fig. 1*) si tirano due rette AB , AC in differenti direzioni, esse formano una figura, che dicesi *angolo*. Il punto A è il *vertice* del medesimo; le rette AB , AC ne sono i *lati*.

Si suole indicare un angolo con la sola lettera del vertice, ovvero con tre lettere ponendo quella del vertice nel mezzo. Si dice perciò tanto l'angolo A come BAC . Quest'ultima notazione è indispensabile quando più angoli hanno il medesimo vertice.

Una retta AB (*fig. 2*) che ne incontra un'altra CD forma con questa due angoli ABC , ABD situati uno accanto all'altro e perciò detti *adiacenti*.

Se due angoli adiacenti sono eguali come $A'B'C'$, $A'B'D'$ (*fig. 3*) le due rette che gli formano sono *perpendicolari* fra loro; in ogni altro caso sono *oblique*.

Angolo retto è quello che ha i lati perpendicolari.

Due angoli ABC , DBE (*fig. 4*) sono *opposti al vertice* quando i lati BD , BE dell'uno sono in prolungamento di quelli BC , BA dell'altro.

Due rette in un piano son *parallele* quando prolungate indefinitamente non si incontrano mai.

Bisectrice di un angolo è la retta che lo divide in due parti eguali.

Uno spazio racchiuso fra più rette in un piano, forma una figura che si chiama *poligono*. Le rette che lo chiudono sono i *lati* del medesimo; i punti d'intersezione dei lati, diconsi *vertici*.

Un poligono può esser formato da tre, quattro, cinque, sei, ec., lati e prende, a seconda dei casi, le denominazioni di *triangolo*, *quadrilatero*, *pentagono*, *esagono*, ec.

Un poligono è *convesso* come $A B C D E$ (*fig. 5*), allorchè, prolungando uno qualunque $A B$ dei suoi lati, questo prolungamento lascia l'intero poligono tutto da una parte. Altrimenti il poligono è *rientrante*, come $F G H I L$ (*fig. 6*).

Fra i triangoli si distinguono:

L'*equilatero* che ha i tre lati eguali $A B C$ (*fig. 7*);

L'*isoscele* $D E F$ (*fig. 8*) che ha due lati eguali $D E$, $D F$; il terzo lato $E F$, chiamasi *base*;

Il *rettangolo* $L M N$ (*fig. 9*) che ha un angolo retto M ; il lato $L N$, opposto al medesimo, dicesi *ipotenusa*; gli altri due $L M$, $M N$, sono i *cateti*.

Fra i quadrilateri si distinguono:

Il *trapezio* (*fig. 10*) che ha due lati $A B$, $C D$, paralleli e che diconsi *basi*;

Il *parallelogrammo* che ha i lati opposti due a due paralleli $[E F G H]$ (*fig. 11*);

La *losanga* che ha i quattro lati eguali $[L M N O]$ (*fig. 12*);

Il *rettangolo* che ha i quattro angoli retti $[P Q R S]$ (*fig. 13*);

Il *quadrato* $[U V X Y]$ (*fig. 14*) che ha al tempo stesso i lati eguali e gli angoli retti.

In un poligono qualunque, chiamasi *diagonale* la retta che unisce due vertici non adiacenti.

La *circonferenza* è una curva chiusa, della quale tutti i punti sono egualmente distanti da un punto fisso ed interno, che dicesi *centro*. Circolo è la superficie racchiusa dalla circonferenza.

In un circolo (*fig. 15*) sono rimarchevoli le seguenti linee e superfici, cioè:

1.° Il *raggio* CA , che è una retta che va dal centro alla circonferenza;

2.° Il *diametro* che è una retta che passando per il centro termina da ambo i lati alla curva, come AB ;

3.° La *corda* AD che termina dai due lati alla curva, senza però passare per il centro;

4.° L'*arco* AMD che è una porzione della circonferenza;

5.° La *secante* NV retta indefinita che taglia la curva in due punti P e Q ;

6.° La *tangente* UT retta che ha colla curva un solo punto a comune F , detto di *contatto*;

7.° Il *settore* $AMDC$, che è la superficie compresa fra un arco e due raggi;

8.° Il *segmento* AMD , superficie racchiusa fra un arco e la sua corda.

Assioma chiamasi in Geometria una verità evidente di per sè stessa.

Teorema è una verità che occorre dimostrare.

Problema è un quesito di cui si chiede la soluzione.

Lemma è una proposizione che si premette avanti la dimostrazione di un teorema.

Corollario è una conseguenza di un teorema.

Scolio è un'osservazione che si riferisce alla dimostrazione di un teorema o alla soluzione di un problema.

Teorema.

Da un punto preso sopra di una retta può alzarsi una perpendicolare alla medesima, ma non se ne può alzare che una sola (fig. 16).

Sia O il punto ed AB la retta data.

Immaginiamo che una retta qualunque OC , dapprima coincidente con OA , ruoti attorno al punto O ; l'angolo $AO C$ che era piccolissimo andrà sempre crescendo, mentre il suo adiacente $BO C$ diminuisce della stessa quantità; vi sarà dunque una posizione e non potrà evidentemente esser che una, nella quale i due angoli saranno eguali. In questa

posizione la CD è appunto perpendicolare ad AB , dunque il teorema è dimostrato.

COROLLARIO: *Tutti gli angoli retti sono eguali* (fig. 17).

Sieno ABC , $A'B'C'$ due angoli retti. Si sovrappongano per modo che i loro vertici B , B' non che i lati BC , $B'C'$ coincidano. La retta $A'B'$ prenderà la direzione AB , perchè da un punto B non può alzarsi che una perpendicolare sopra una retta BA . Quindi i due angoli retti, stando esattamente l'uno sull'altro, sono eguali.

SCOLIO: Un angolo è *acuto* o *ottuso*, secondochè è minore o maggiore dell'angolo retto.

§ 2.

Una retta che ne incontra un'altra, fa con essa due angoli adiacenti. la cui somma eguaglia due angoli retti.

Teorema.

La somma di due angoli adiacenti eguaglia due angoli retti e viceversa (fig. 18).

Siano ABD , ABC gli angoli dati. Al punto B innalzisi BE perpendicolare a CD che decomporrà l'angolo ABC nei due ABE , CBE . La somma dei due angoli adiacenti ABC , ABD resulterà eguale a quella dei tre angoli CBE , ABE , ABD . Ora CBE è retto; gli altri due ABE , ABD formano insieme l'altro retto EBD , quindi la somma dei due adiacenti eguaglia realmente due retti.

Viceversa abbiasi $ABC + ABD = 2$ retti, vuolsi provare che BD è il prolungamento di BC . Si supponga esser BE' questo prolungamento incognito, i due angoli, ABE' , ABC sommati insieme faranno due retti come ABC ed ABD .

Ciò implica di necessità che debba essere $ABE' = ABD$ o in altri termini che le rette BE' , BD si confondano. Dunque BD è il prolungamento di BC , come si trattava di dimostrare.

COROLLARIO 1.° *La somma degli angoli fatti attorno ad un punto A di seguito e dalla stessa parte di una retta BC eguaglia due angoli retti (fig. 19).*

La somma di tutti questi angoli BAD , DAE , EAF , FAC eguaglia difatto dietro l'ispezione della figura, quella di due angoli adiacenti come BAF , FAC .

COROLLARIO 2.° *La somma degli angoli fatti di seguito attorno ad un punto A, è di quattro angoli retti (fig. 20).*

Siano BAC , CAD , DAE , EAF , FAB gli angoli dati. Si prolunghi una retta AB fra i loro lati in AG e si rimpiazzì l'angolo DAE con i due che lo formano DAG , GAE . Gli angoli fatti attorno al punto A da ciascheduna parte della retta BG , essendo in totale due retti, la somma degli angoli dati sarà di $2 + 2$, ossia 4 angoli retti.

SCOLIO: Si chiamano angoli *supplementari* due angoli che sommati insieme fanno due retti, e *complementari* invece, quelli la cui somma forma un angolo retto.

Due angoli adiacenti sono dunque supplementari. Uno di essi è ottuso, l'altro acuto.

Due angoli complementari sono invece sempre amendue angoli acuti.

§ 3.

Quando due rette si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali fra loro.

Teorema.

Gli angoli opposti al vertice sono eguali.

Siano AOC , BOD (fig. 21) due angoli opposti al vertice; AOC come adiacente di COB ne è supplemento; per identica ragione anche BOD è pure supplemento di COB . Dunque i due angoli AOC , BOD , supplementi ambedue dello stesso angolo, debbono essere eguali.

§. 4.

Se da un punto qualunque preso dentro di un triangolo si tirano due rette all'estremità di un lato, la somma di queste due rette è minore di quella degli altri due lati. La somma delle distanze da un punto preso nell'interno di un triangolo ai tre vertici del medesimo, è minore del perimetro e maggiore del semi-perimetro del triangolo. Una linea poligona convessa è minore di qualunque altra linea che la involupi e che sia terminata dai medesimi estremi.

Teorema.

Un lato qualunque di un triangolo è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (fig. 22).

Il lato BC , per esempio, essendo la retta che congiunge i punti B e C è necessariamente minore della linea spezzata BAC . Quindi si ha:

$$BC < BA + AC.$$

Da questa disuguaglianza sottratto poi da ambo i lati AB , ne risulta:

$$BC - AB < AC,$$

o ciò che è lo stesso:

$$AC > BC - AB.$$

Teorema.

Se da un punto qualunque O , preso dentro un triangolo ABC , si tirano due rette OB , OC all'estremità del lato BC , la somma delle medesime è minore di quella degli altri due lati AB , AC (fig. 23).

Si prolunghi la retta OB scelta a piacere fra le due tirate fino ad incontrare in D il lato AC . Nel triangolo ABD noi avremo pel teorema precedente:

$$BD < BA + AD,$$

ovvero:

$$BO + OD < BA + AD.$$

Nell'altro triangolo ODC sarà:

$$CO < OD + DC.$$

Sommando le due disuguaglianze membro a membro, viene:

$$BO + OD + CO < BA + AD + OD + DC.$$

Riducendo ed osservando che $AD + DC = AC$, risulta:

$$BO + CO < BA + CA,$$

come volevasi provare.

Teorema.

Se si unisce un punto qualunque preso nell'interno di un triangolo coi tre vertici, la somma delle rette risultanti è minore del perimetro e maggiore del semi-perimetro del triangolo (fig. 24).

1.° Considerate due a due le tre rette OA , OB , OC , pel teorema dimostrato di sopra, avremo le tre disuguaglianze:

$$\begin{aligned} OC + OB &< AC + AB, \\ OC + OA &< AB + BC, \\ OA + OB &< AC + BC. \end{aligned}$$

Sommando, risulta:

$$2OA + 2OB + 2OC < 2AC + 2AB + 2BC,$$

e dividendo per 2:

$$OA + OB + OC < AC + AB + BC;$$

2.° Nei tre triangoli AOB , AOC , BOC si hanno per un teorema cognito le tre disuguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} AO + OB &> AB, \\ AO + OC &> AC, \\ OB + OC &> BC. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro ne viene:

$$2AO + 2OB + 2OC > AB + AC + BC,$$

e dividendo per 2:

$$AO + OB + OC > \frac{1}{2} (AB + AC + BC),$$

come si doveva dimostrare.

Teorema.

Una linea poligona convessa è minore di qualunque altra linea che la inviluppi e che sia terminata ai medesimi estremi (fig. 25).

Sia $ABCD$ la poligona convessa e $A E F D$ la linea che la inviluppa. Si prolunghino le rette AB , BC fino ad incontrare quest'ultima in E ed F , poscia si tirino EF ed FD . Avremo per la definizione della linea retta che:

$$\begin{aligned} AE \text{ retta} &< AE \text{ curva}, \\ EF \text{ id.} &< EF \text{ id.}, \\ FD \text{ id.} &< FD \text{ id.}, \end{aligned}$$

e perciò sommando:

$$AE + EF + FD < \text{curva } A E F D.$$

Se dunque potremo dimostrare che la poligona $ABCD$ è minore dell'altra poligona $A E F D$, a più forte ragione essa dovrà esser minore della curva inviluppante.

Ora per un tale oggetto si osservino i triangoli BFE , CFD che danno rispettivamente:

$$\begin{aligned} BC + CF &< BE + EF, \\ CD &< CF + FD. \end{aligned}$$

Si sommino queste due disuguaglianze e si aggiunga AB da ambo i lati; si otterrà:

$$AB + BC + CF + CD < AB + BE + EF + CF + FD,$$

e riducendo:

$$AB + BC + CD < AE + EF + FD.$$

§ 5.

Due triangoli sono eguali: 1.° Quando hanno un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente eguali; 2.° Quando hanno un lato eguale adiacente a due angoli rispettivamente eguali; 3.° Quando hanno i tre lati rispettivamente eguali.

Teorema.

Due triangoli che hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali, sono eguali.

Siano ABC , DEF (fig. 26) due triangoli che hanno il lato $AB = DE$, $AC = DF$ e l'angolo $A = D$. Si applichi il secondo triangolo sul primo per modo che i lati eguali AB , DE coincidano cadendo in A il punto D ed in B il punto E . Attesa l'eguaglianza degli angoli A e D , il lato DF prenderà la direzione AC , e siccome $AC = DF$, il punto F cadrà in C , e così il terzo lato FE del triangolo DEF , coinciderà col terzo lato BC del triangolo ABC . I due triangoli allora sovrapponendosi esattamente saranno eguali ed avranno tutti gli elementi eguali.

Teorema.

Due triangoli che hanno un lato e due angoli adiacenti eguali, sono eguali (fig. 27).

Sieno ABC , DEF i due triangoli che hanno il lato $AB = DE$, l'angolo $A = D$ e $B = E$. Si porti il secondo sul primo in guisa che i lati eguali AB , DE coincidano, il punto D cada in A ed E in B . Attesa l'eguaglianza degli angoli A e D il lato DF prenderà la direzione AC e per una simil ragione il lato EF prenderà la direzione BC . Perciò il punto F intersezione di FD e FE , viene a situarsi nel punto C intersezione di CA e CB . I due triangoli allora sovrammettendosi saranno eguali ed avranno tutti gli elementi eguali.

Teorema.

Se sulla metà C di una retta AB viene innalzata una perpendicolare alla medesima DE (fig. 28):

1.° Ogni punto della DE è ~~dis~~ugualmente distante dagli estremi di AB ;

2.° Ogni punto esterno alla DE è disugualmente distante dai punti A e B .

1.° Sia D un punto della DE . Tirate DA e DB formeremo due triangoli DAC , DCB che saranno eguali come aventi il lato DC comune $CA = CB$ come le due metà di AB e l'angolo compreso $DCA = DCB$ perchè retti. Perciò il terzo lato DA dell'uno, eguaglia il terzo lato DB dell'altro;

2.° Sia F un punto posto fuori della DE . Si tirano FA , FB e pel punto G in cui la prima di questa incontra la DE , si conduca GB . Per la prima parte del teorema sarà $GA = GB$. Ora nel triangolo GBF , si ha:

$$FB < GB + GF,$$

e ponendo al posto di GB la sua eguale GA :

$$FB < GA + GF,$$

ossia:

$$FB < FA,$$

come si doveva dimostrare.

Teorema.

Due triangoli che hanno i tre lati rispettivamente eguali, sono eguali (fig. 29).

Sieno ABC , DEF i due triangoli che hanno il lato $AB = DE$, $AC = DF$ e $BC = EF$. Al punto C si faccia l'angolo $BCG = F$, e sulla retta così determinata si prenda la lunghezza $CG = DF$, tirando quindi BG . I due triangoli BCG , DEF saranno eguali per aver due lati e l'angolo compreso eguale, perciò $BG = DE = BA$.

Ciò posto si conduca la retta GA . Siccome tanto il punto C che il punto B distano egualmente dalla estremità A e G

di AG , la BC sarà perpendicolare sul mezzo O di quest'ultima retta. Ond'è che si fa ruotare la figura $CG B$ intorno a CB , fino ad abbattersi dalla parte opposta del piano per esser retti ed eguali gli angoli adiacenti in O , la OG cade sulla OA ed il punto G in A , giacchè O è il mezzo di AG . E siccome in questa rotazione C e B son rimasti fermi, il triangolo $CG B$ si applica sopra ABC e gli è eguale. Ma $CG B = DEF$, dunque anche $DEF = ABC$, come volevasi provare.

§ 6.

Se due triangoli hanno un angolo disuguale compreso fra due lati rispettivamente eguali, il terzo lato opposto all'angolo maggiore, sarà maggiore del terzo lato opposto all'angolo minore e viceversa.

Teorema.

Se due triangoli hanno un angolo disuguale compreso fra lati rispettivamente eguali, i terzi lati son disuguali e al maggior angolo sta opposto il maggior lato e viceversa (fig. 30).

1.° Siano ABC , DEF i due triangoli che hanno il lato $AB = DE$, $AC = DF$ e l'angolo $A > D$. Portisi il secondo triangolo sul primo in modo che i lati eguali AB , DE coincidano e si supponga essere ABC la posizione presa da questo secondo triangolo. Si divida per metà l'angolo GAC colla bisettrice AO e si tiri OG . I due triangoli GAO , OAC , che hanno il lato AO comune, $AC = DF = AG$ e l'angolo compreso $GAC = OAC$, per costruzione saranno eguali, quindi $GO = OC$. Ora nel triangolo BGO , si ha:

$$BG < BO + OG,$$

e ponendo OC al posto di GO :

$$BG = EF < BC,$$

come volevasi dimostrare;

2.° Si supponga $AB = DE$, $AC = DF$ e $BC > EF$. L'angolo A non potrà essere eguale a D , perchè allora i

due triangoli avendo due lati e l'angolo compreso eguale risulterebbero eguali, e quindi $BC = EF$, mentre ciò non è. Neppure può essere $A < D$, perchè per la prima parte del teorema dovrebbe risultarne $BC < EF$, mentre succede il contrario. Dunque l'angolo A non potendo essere nè eguale, nè minore di D , ne sarà necessariamente maggiore.

SCOLIO. La dimostrazione della prima parte del teorema sarebbe stata identica quando il punto G fosse venuto a cadere sopra alla retta BC o dentro il triangolo ABC .

§ 7.

Dividere un angolo in due parti eguali. Dividere una data retta in due parti eguali. Da un punto dato sopra di una retta, innalzare una perpendicolare a questa retta e dimostrare che non se ne può alzare che una sola. Da un punto dato fuori di una retta, abbassare una perpendicolare sopra questa retta e provare che non se ne può abbassare che una sola. Per un punto preso sopra una retta, condurre un'altra retta che formi con questa un angolo eguale ad un angolo dato. Di un triangolo essendo dati un lato e due angoli adiacenti, ovvero un angolo e due lati qualunque, ovvero i tre lati, costruire il triangolo.

Problema.

Dividere un angolo in due parti eguali (fig. 31).

Sia A l'angolo dato. Determinati sui suoi lati, i punti B e C equidistanti dal vertice, si faccia centro nei medesimi e con raggio eguale ed arbitrario, ma sufficientemente grande, si descrivano due archi di circolo che si taglieranno in D . Tirata AD , avremo risoluto il problema.

Difatto se si conducono BD e DC , i due triangoli ACD , ABD risulteranno eguali come aventi i tre lati eguali; quindi l'angolo $BAD = CAD$.

Problema.

Dividere una data retta in due parti eguali (fig. 32).

Sia AB la data retta. Fatto centro negli estremi A e B della medesima con raggi arbitrarii, ma eguali fra loro e maggiori della metà di AB , si descrivano al disopra e al

disotto della medesima degli archi di circolo che si taglieranno nei punti C e D . Tirata CD , questa determinerà la divisione della AB in due parti eguali nel punto O .

Difatto i punti C e D essendo equidistanti da A e da B , la retta CD è perpendicolare sul mezzo O della AB .

Problema.

Da un punto preso sopra di una retta, innalzare una perpendicolare alla medesima.

Sia AB (fig. 33) la retta e C il punto dato. Scelti sulla retta AB i punti A e B equidistanti da C , si faccia centro nei medesimi e con raggio arbitrario, ma eguale e maggiore della metà di AB , si descrivano due archi di circolo che si taglieranno in D . Tirata CD , questa sarà la perpendicolare richiesta, giacchè il punto D essendo equidistante da A e da B , appartiene alla perpendicolare sul mezzo C di AB .

SOLIO. Fu già altrove dimostrato che da un punto preso sopra una retta non si può alzare se non che una perpendicolare alla medesima.

Problema.

Da un punto preso fuori di una retta, abbassare una perpendicolare alla medesima e dimostrare che non se ne può abbassare che una sola (fig. 34).

Sia A il punto e BC la retta data. Determinati su quest'ultima, con un arco di circolo, i punti B e C equidistanti da A , si faccia centro nei medesimi e con raggio qualsiasi, ma maggiore della metà di BC e eguale per amendue, si descrivano degli archi che si intersecheranno in un punto D . Tirata AD , questa sarà la perpendicolare richiesta. Difatto tanto A , come D , essendo equidistanti dagli estremi B e C di BC , la retta AD risulta perpendicolare sul mezzo di BC .

Per provare che questa perpendicolare è unica, si tiri pel punto A un'altra retta qualunque AB che cada sulla

BC , e si faccia quindi ruotare la parte superiore del piano fino ad abbattersi sull'inferiore.

Per essere l'angolo retto AFB eguale al suo adiacente BFD , il punto A verrà a situarsi in un punto A' della DA e siccome B riman fermo, la AB occuperà la posizione $A'B$, e l'angolo ABF risulterà eguale ad $A'BF$. Ciò fatto si rialzi la figura. Si osservi quindi che la linea retta che unisce A , e A' essendo la AA' , l'altra linea ABA' è spezzata ed $A'B$ non è prolungamento di AB . E perciò la somma degli angoli ABF , $A'BF$ non facendo due retti, l'angolo ABF , che è la metà di questa somma, non è retto e la AB è obliqua a BF , come volevasi dimostrare.

;

Problema.

Per un punto preso sopra una retta, condurre un'altra retta che formi con questa un angolo eguale ad un angolo dato (fig. 35).

Sia AB la retta, A il punto ed M l'angolo dato. Si faccia centro nel vertice di quest'ultimo e con raggio a piacere si descriva un arco compreso fra i lati di quest'angolo. Indi si faccia centro in A e collo stesso raggio si descriva un altro arco, sul quale si riporterà da D in C la corda $DC = NP$. Tirata AC , avremo l'angolo richiesto.

Difatto se si conducono le rette NP , CD , i due triangoli MNP , ACD , che hanno i tre lati uguali, risulteranno eguali, e perciò l'angolo $A = M$.

Problema.

Dato un lato e i due angoli adiacenti di un triangolo, costruire il triangolo (fig. 36).

Sia A il lato, B e C gli angoli dati. Presa una retta $DE = A$, si facciano ai punti D ed E gli angoli $FDE = B$, $FED = C$. Le due rette così determinate GE , DL si taglieranno in F ed FDE sarà il triangolo che evidentemente soddisfa alle condizioni imposte.

SOLIO. Allorchè le due rette EG , DL non si tagliano, il problema è impossibile a risolversi con i dati elementi.

Ciò avviene quando i due angoli dati sono ambedue ottusi o retti, uno ottuso ed uno retto, o anche uno ottuso ed uno acuto, ma però troppo grandi.

Problema.

Dati due lati e l'angolo compreso di un triangolo, costruire il triangolo (fig. 37).

Sieno A, B i lati e C l'angolo dato. Costruito col metodo cognito un angolo $FDE = C$, si prendano sui suoi lati ed a partire dal vertice le lunghezze $DE = A$, $DF = B$ e si tiri la EF . Il triangolo DEF soddisfarà alle imposte condizioni.

SOLIO. Il problema è sempre possibile.

Problema.

Dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi, costruire il triangolo (fig. 38).

Sieno A e B i lati e C l'angolo che si suppone opposto al lato B . Fatto un angolo $EDF = C$, si prenda sopra uno dei suoi lati, a partir dal vertice, la lunghezza $DE = A$, indi con centro in E e raggio B , si descriva un arco di circolo che taglierà generalmente la DF in due punti G ed F . Condotte EG ed EF i triangoli EGD , EFD soddisfaranno alle imposte condizioni.

SOLIO. Il problema può avere due soluzioni, una o anche nessuna. Si verifica il 1.° caso quando l'angolo dato è acuto e $A > B$; il secondo se l'angolo C è ottuso, ovvero essendo acuto, si ha $A < B$, oppure B eguaglia la distanza dal punto E alla retta DF . Ha luogo infine il terzo caso se il lato B è minore della distanza dal punto E alla retta DF .

Problema.

Dati i tre lati di un triangolo, costruire il triangolo (fig. 39).

Sieno A, B, C i lati dati. Presa sopra una retta qualunque la lunghezza $EF = A$, si faccia centro nei punti E ed F

e con raggi rispettivamente eguali a B e C , si descrivano due archi di circolo che si taglieranno in D . Tirate DE e DF , avremo evidentemente in DEF il triangolo richiesto.

SOLIO. Il problema è insolubile allorchè i due archi non si intersecano, e questo caso si verifica quando un lato qualunque non è minore della somma degli altri due.

§ 8.

Nel triangolo isoscele i due angoli opposti ai lati eguali, sono eguali.

Teorema.

Gli angoli opposti ai lati eguali di un triangolo isoscele sono eguali e viceversa (fig. 40).

1.° Sia ABC il triangolo isoscele che ha il lato $AB = AC$. Si conduca dal vertice la retta AD alla metà della base BC , con che si formeranno due triangoli BAD , DAC , che avranno il lato AD comune, $AB = AC$ per ipotesi e $BD = DC$ per costruzione. Essi saranno dunque eguali e avremo allora $B = C$, come volevasi provare.

COROLLARIO 1.° *Dall'eguaglianza dei triangoli sopra citati, ne viene che $ADB = ADC$ e $BAD = CAD$. Ora i primi due angoli essendo adiacenti resulteranno retti. Dal che si deduce come:*

In un triangolo isoscele la retta che va dal vertice alla metà della base, è perpendicolare a questa base e divide per metà l'angolo al vertice;

COROLLARIO 2.° *Ogni triangolo equilatero è anche equiangolo.*

Ciò risulta evidente, considerandone due a due i lati e gli angoli;

2.° Sia ABC (fig. 41) il triangolo nel quale l'angolo $B = C$. Si faccia l'angolo BCD eguale ai due angoli B e C , indi si prenda sulla retta CD così determinata la lunghezza $CD = AB$ e si tiri BD . I due triangoli ABC , BCD saranno eguali come aventi due lati e l'angolo compreso eguale, perciò $DBC = B = C$. Ciò posto si abbatta la figura DBC sopra ABC

facendola ruotare intorno a BC . Per l'eguaglianza dei quattro angoli ABC , ACB , DBC , DCB , i lati DC , DB prenderanno le direzioni rispettive CA e AB e il punto D cadrà in A . Sarà dunque $CD = AC$; ma CD fu preso eguale ad AB , ond'è che anche $AB = AC$ ed il triangolo è isoscele.

COROLLARIO 3.° *Il triangolo equiangolo è equilatero.*

Ciò risulta evidente quando se ne considerino due a due gli angoli e i lati.

§ 9.

Se da un punto preso fuori di una retta si abbassano sulla medesima la perpendicolare e più oblique: 1.° Le oblique equidistanti dal piede della perpendicolare sono eguali e viceversa; 2.° Di due oblique è più lunga quella che si scosta maggiormente dal piede della perpendicolare e viceversa; 3.° La perpendicolare è più corta di qualunque obliqua.

Teorema.

Se da un punto preso fuori di una retta si abbassano sulla medesima la perpendicolare e varie oblique (fig. 42):

1.° *Le oblique equidistanti dal piede della perpendicolare, sono eguali e viceversa;*

2.° *Fra due oblique è più lunga quella che si scosta maggiormente dal piede della perpendicolare e viceversa;*

3.° *La perpendicolare è più corta di qualunque obliqua.*

1.° Siano OB , OC due oblique che si scostano egualmente dal piede A della perpendicolare. I triangoli OAB , OAC saranno eguali come aventi il lato OA comune, $AB = AC$ per ipotesi e gli angoli compresi in A retti, dunque $OB = OC$;

2.° Sia l'obliqua OD discosta più della OC dal piede della perpendicolare. Presa la lunghezza $AB = AC$ e tirato OB , per ciò che dimostrammo di sopra, risulterà $OB = OC$. Ora si prolunghi la perpendicolare OA di una distanza $A'O$ eguale a sè stessa conducendo dopo $O'B$, $O'D$. I triangoli $A'OB$, $O'AB$, che hanno due lati e l'angolo compreso eguale, saranno eguali, quindi $OB = O'B$. Per identica ragione

$OD = O'D$. Ma il punto B essendo interno al triangolo ODO' , si ha per un cognito teorema:

$$OB + O'B < OD + O'D,$$

ossia avuto riguardo alle eguaglianze dimostrate:

$$2OB < 2OD,$$

o anche:

$$OB < OD.$$

Ma $OB = OC$, dunque $OC < OD$, come volevasi dimostrare;

3.° Prolungata sempre la perpendicolare della lunghezza AO' eguale a sè stessa nel triangolo OBO' , si avrà:

$$OO' < OB + BO',$$

ossia:

$$2OA < 2OB,$$

o anche:

$$OA < OB;$$

4.° Viceversa suppongasi l'oblique $OB = OC$. La prima non potrà distare più dell'altra dal piede della perpendicolare, perchè allora pel n.° 2 del teorema ne sarebbe maggiore; non potrà distarne meno, giacchè per identica ragione, ne sarebbe minore; dovrà dunque distarne egualmente;

5.° Sia $OD > OC$. La prima non potrà distare quanto l'altra dal piede della perpendicolare, perchè dovrebbe allora esserle eguale, mentre non lo è; non potrà distarne meno, giacchè in tal caso pel n.° 2 ne sarebbe minore ed è invece il contrario; deve dunque allontanarsene di più.

Scolio. La perpendicolare essendo la retta più corta che vada da un punto a un'altra retta, è stata scelta per misurarne la distanza reciproca.

§ 10.

Due triangoli rettangoli sono eguali se hanno l'ipotenusa ed un cateto eguale, ovvero l'ipotenusa ed un angolo adiacente eguali.

Teorema.

Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa ed un cateto eguale sono eguali, (fig. 43).

Sieno ABC , DEF i dati triangoli che hanno l'ipotenusa $AC = DF$ ed il cateto $DE = AB$. Si porti il secondo trian-

golo sul primo per modo che i due angoli retti coincidano. Attesa l'eguaglianza dei cateti DE , AB , il punto D cadrà in A , e l'ipotenusa DF dovrà sovrapporsi ad AC , giacchè altrimenti esisterebbero due oblique eguali e diversamente discoste dal piede della perpendicolare, lo che è impossibile.

Teorema.

Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa ed un angolo adiacente eguali, sono eguali (fig. 44).

Sieno ABC , DEF i dati triangoli che hanno l'ipotenusa $AC = DF$ e l'angolo $F = C$. Si porti il secondo sul primo per modo che gli angoli eguali si sovrappongano, l'ipotenusa DF coinciderà con AC ed il cateto DE dovrà sovrapporsi ad AB , giacchè altrimenti da un punto A esterno ad una retta BC si potrebbero abbassare due perpendicolari alla medesima.

§ 11.

Se due angoli di un triangolo sono disuguali, al maggiore angolo sta opposto lato maggiore; viceversa se due lati sono disuguali, al lato maggiore sta opposto angolo maggiore.

Teorema.

Se un triangolo ha due angoli disuguali al maggior angolo sta opposto il maggior lato e viceversa (fig. 45).

1.° Nel triangolo ABC abbiasi l'angolo $C > A$. Si faccia l'angolo ACD eguale ad A , con che verrà formato un triangolo ACD che avendo due angoli eguali risulterà isoscele ed avrà il lato $CD = AD$. Ciò posto nel triangolo BCD , si ha:

$$BC < BD + DC,$$

e ponendo AD al posto di DC :

$$BC < BD + AD,$$

ovvero: $BC < BA,$

come volevasi provare;

2.° Viceversa sia il lato $BA > BC$. L'angolo A opposto al secondo lato non potrà esser eguale all'angolo C opposto al primo, perchè allora il triangolo sarebbe isoscele ed avrebbe il lato $AB = BC$. Neppure potrà aversi $A > C$ perchè allora per la prima parte del teorema risulterebbe $BC > BA$ ed è invece il contrario. Dunque l'angolo A non potendo essere nè eguale, nè maggiore di C , sarà necessariamente minore.

§ 12.

Due rette perpendicolari ad una terza, son parallele fra loro. Due rette parallele ad una terza, sono parallele fra di loro.

Per spiegare completamente la teoria delle rette parallele, noi ammetteremo, senza dimostrarlo, il lemma che segue, il quale benchè non assiomatico, è però abbastanza evidente. La dimostrazione di questo lemma esce affatto dagli elementi.

Lemma.

Per un punto dato non si può tirare che una parallela ad una retta data.

Teorema.

Due rette perpendicolari ad una terza, son parallele fra loro.

Se difatto esse s'incontrassero, dal loro punto d'incontro sarebbero state abbassate due perpendicolari sulla terza retta, lo che sappiamo non poter essere.

Teorema.

Due rette parallele ad una terza, son parallele fra loro.

Se difatto esse s'incontrassero dal loro punto d'incontro, si potrebbero condurre due parallele alla terza retta, lo che contraddice al lemma già ammesso.

§ 13.

Se due rette parallele son secate da una terza: 1.° Gli angoli alterni-interni sono eguali; 2.° Gli angoli alterni-esterni sono pure eguali; 3.° Gli angoli corrispondenti sono eguali; 4.° La somma di due angoli interni dalla stessa parte è eguale a due retti; 5.° La somma di due angoli esterni dalla stessa parte è pure eguale a due retti. Reciprocamente se due rette secate da una terza danno luogo ad una delle cinque proprietà indicate nel teorema precedente, esse saranno parallele. Per un punto dato condurre una parallela ad una retta data.

Allorquando due rette qualunque AB , CD (fig. 46) son tagliate da una terza EF nei punti G ed L , gli otto angoli formati ricevono varie denominazioni.

I quattro angoli situati internamente alle due rette, cioè AGL , BGL , CLG , DLG , diconsi *interni*.

Gli altri quattro EGA , EGB , FLC , FLD , posti al di fuori, sono invece *esterni*.

Sono *alterni* fra loro due angoli situati da parti diverse della secante e non adiacenti. Essi possono essere *alterni-interni* come AGL e DLG , oppure *alterni-esterni* come EGA , DLF .

Corrispondenti son due angoli situati dalla stessa parte della secante, uno interno, l'altro esterno e non adiacenti. Tali sarebbero, per esempio, EGB , GLD .

Teorema.

Quando due rette parallele son tagliate da una secante (fig. 47):

- 1.° Gli angoli alterni-interni sono eguali;
- 2.° Gli angoli alterni-esterni sono eguali;
- 3.° Gli angoli corrispondenti sono eguali;
- 4.° La somma di due angoli interni dalla stessa parte è eguale a due retti;
- 5.° La somma di due angoli esterni dalla stessa parte è pure eguale a due retti.

1.° Sieno AB , CD le date parallele secate dalla retta EF . Pel punto O mezzo della parte GL della secante intercetta

fra le parallele si conduca la perpendicolare MON ad AB che dovrà anche esserlo a CD , giacchè ove la perpendicolare ad MN condotta per N fosse diversa da CD , ne verrebbe che da un punto N si potrebbe tirare due parallele ad AB e ciò non sussiste. Posta questa premessa i due triangoli rettangoli OMG , OLN avranno il lato ipotenusa $OL = OG$ per costruzione e l'angolo $MOG = LON$ come opposti al vertice; saranno dunque eguali e quindi l'angolo $MGO = OLN$, come volevasi dimostrare;

2.° Dall'essere eguali gli alterni-interni AGL , GLD , ne viene l'eguaglianza dei loro opposti al vertice alterni-esterni EGB , CLF ;

3.° Avendosi $AGL = GLD$, siccome AGL eguaglia il suo opposto al vertice EGB , ne viene anche $EGB = GLD$;

4.° I due angoli adiacenti EGB , BGL , danno la relazione:

$$EGB + BGL = 2 \text{ retti},$$

e siccome EGB eguaglia il suo corrispondente GLD , questa relazione si cambia nell'altra:

$$GLD + BGL = 2 \text{ retti};$$

5.° Dall'essere:

$$GLD + BGL = 2 \text{ retti},$$

siccome $GLD = CLF$ e $BGL = AGE$, come rispettivamente opposti al vertice si deduce:

$$CLF + AGE = 2 \text{ retti}.$$

Teorema.

Quando due rette tagliate da una secante formano:

- 1.° *Degli angoli alterni-interni, eguali oppure:*
 - 2.° *Degli angoli alterni-esterni eguali;*
 - 3.° *Degli angoli corrispondenti eguali;*
 - 4.° *Degli angoli interni dalla stessa parte supplementarii;*
 - 5.° *Degli angoli esterni dalla stessa parte supplementarii,*
- le due rette son parallele (fig. 48).*

1.° Sieno AB , CD le rette secate da EF . Suppongasi di avere $BGL = CLG$, e sia $C'D'$ la posizione della parallela condotta pel punto L ad AB . Pel teorema precedente dovremo avere $BGL = C'LG$. Paragonata questa eguaglianza con quella data, ne risulta che $CLG = C'LG$, il che esige che la $C'D'$ si confonda con CD ;

2.°, 3.°, 4.° e 5.° Si dimostrerebbero questi quattro casi in modo identico.

Problema.

Per un punto dato condurre una parallela ad una retta data (fig. 49).

Sia AB la retta e C il punto dato. Per il medesimo si conduca una retta che vada ad incontrare la AB e sia CD . Si faccia l'angolo $DCE = CDA$ e CE sarà la parallela richiesta. Difatto le due rette CE , AB secate da CD , formando due angoli alterni-interni eguali DCE , ADC , saranno parallele per ciò che fu dimostrato nel precedente teorema.

§ 14.

Due angoli che hanno i lati rispettivamente paralleli e l'apertura volta nello stesso verso, o in verso opposto, sono eguali.

Teorema.

Due angoli che hanno i lati paralleli, sono eguali o supplementarii (fig. 50).

Possono accadere tre casi, cioè: 1.° che i lati paralleli sien rivolti ambedue nello stesso verso; 2.° che sien rivolti in senso contrario; 3.° che due sien rivolti nello stesso verso e due in verso opposto.

Nei primi due casi gli angoli dati sono eguali, nel terzo supplementarii.

1.° Sieno ABC , DEF gli angoli dati. Si prolunghi il lato DE fino ad incontrare in G la BC . Gli angoli DEF , DGC saranno eguali come corrispondenti fra le parallele EF ,

BC secate da DG ; saranno pure eguali ABC , DGC come corrispondenti fra le parallele DG , AB tagliate da BC . E siccome due quantità eguali ad una terza sono eguali fra loro, così $ABC = DEF$;

2.° Sieno ABC , LEG gli angoli dati. Si prolunghino i lati di quest'ultimo in EF , ED ; l'angolo DEF sarà eguale ad ABC come avente i lati paralleli e rivolti nello stesso verso. Ma LEG eguaglia il suo opposto al vertice DEF , dunque LEG è anche eguale ad ABC ;

3.° Sieno ABC , LED gli angoli dati. Prolungato il lato LE di quest'ultimo in EF , l'angolo DEF adiacente a LED ne sarà il supplemento. Ma DEF eguaglia ABC , dunque anche ABC è supplemento di LED .

Teorema.

Due angoli che hanno i lati rispettivamente perpendicolari sono eguali allorchè sono amendue acuti od ottusi; invece sono supplementarii quando l'uno è acuto e l'altro ottuso (fig. 51).

1.° Sieno ABC , DEF due angoli a lati perpendicolari e della stessa specie, per esempio, acuti. Pel vertice B del primo si conducano le parallele BM , BL ai lati del secondo rivolte nello stesso senso; l'angolo MBL sarà allora eguale a DEF . Ora i due angoli retti MBA , LBC sono eguali, e siccome il primo si compone di MBL e LBA ed il secondo di LBA ed ABC , si ha:

$$MBL + LBA = LBA + ABC.$$

Sottraendo da ambo i lati LBA , rimane:

$$MBL = DEF = ABC,$$

come volevasi provare;

2.° Sieno ABC , DEG due angoli a lati perpendicolari, ma di diversa specie, per esempio, acuto il primo ed ottuso l'altro. Si prolunghi un lato del secondo EG in EF ; l'angolo DEF adiacente a DEG sarà acuto ed eguale perciò ad ABC . Ma DEG è supplementare di DEF , dunque lo è anche di ABC .

§ 15.

In ogni triangolo la somma dei tre angoli è eguale a due angoli retti.

Teorema.

La somma dei tre angoli di un triangolo eguaglia due angoli retti (fig. 52).

Prolunghisi un lato qualunque CA del triangolo e pel punto A si tiri AE parallela a BC . Avremo evidentemente dietro l'esame della figura che:

$$BAC + BAE + EAD = 2 \text{ retti.}$$

Ma $BAE = CBA$ e $EAD = BCA$ i primi come alterni-interni fra le parallele BC , AE tagliate da AB i secondi come corrispondenti fra le stesse parallele secate da DC ; quindi l'eguaglianza sopra stabilita può cambiarsi nell'altra:

$$BAC + CBA + BCA = 2 \text{ retti.}$$

COROLLARIO 1.° *L'angolo BAD fatto dal lato BA e dal prolungamento di CA e che perciò risulta esterno al triangolo, eguaglia la somma dei due angoli interni opposti, cioè non adiacenti.*

Si ha difatto che $BAD = BAE + EAD$. Ma noi dimostriamo che:

$$BAE = ABC \text{ e } EAD = ACB;$$

dunque l'eguaglianza trovata può cambiarsi nell'altra:

$$BAD = ABC + ACB.$$

COROLLARIO 2.° *In un triangolo non può esservi che un solo angolo retto od ottuso.*

Ciò è chiaro giacchè in caso diverso la somma dei tre angoli sorpasserebbe i due retti.

COROLLARIO 3.° *I due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementarii.*

Ciò è evidente se la somma dei tre angoli deve formare due retti.

COROLLARIO 4.° *Se due triangoli hanno due angoli rispettivamente eguali, il terzo angolo del primo sarà eguale al terzo angolo del secondo.*

Sieno A, B, C gli angoli del primo triangolo; D, E, F quelli del secondo. Per il teorema dimostrato, dobbiamo avere:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \text{ retti,} \\ D + E + F &= 2 \text{ retti,} \end{aligned}$$

donde: $A + B + C = D + E + F.$

Ma avendo già supposto $A = D, B = E$, dovrà essere anche $C = F.$

COROLLARIO 5.° *L'angolo di un triangolo equilatero è i due terzi dell'angolo retto.*

Il triangolo equilatero essendo anche equiangolo, detto A il valor del suo angolo, dovremo avere:

$$3 A = 2 \text{ retti,}$$

donde: $A = \frac{2}{3} \text{ retto.}$

§ 16.

La somma di tutti gli angoli interni di un poligono è eguale a tante volte due angoli retti quanti sono i lati, meno quattro angoli retti. In un poligono convesso prolungando tutti i lati nello stesso verso, la somma di tutti gli angoli esterni è sempre eguale a quattro angoli retti.

Teorema.

La somma di tutti gli angoli interni di un poligono è eguale a tante volte due angoli retti quanti sono i lati del poligono, meno quattro angoli retti (fig. 53).

Sia $ABCDE$ il dato poligono. Scelto un punto qualunque O interno al medesimo, lo si unisca con tutti i vertici, con che avremo decomposto il poligono stesso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati. La somma degli angoli di tutti questi triangoli OAB, OBC , ec., sarà dunque eguale

a tante volte due retti quanti sono i lati del poligono. Ora la somma degli angoli del poligono si compone evidentemente di quella di tutti gli angoli dei triangoli summentovati diminuita della somma degli angoli formati intorno al punto O . E siccome quest'ultima somma è di 4 retti, ne consegue che quella degli angoli del poligono eguaglia appunto tante volte due angoli retti quanti sono i lati del medesimo, meno quattro retti.

SOLIO. Detto n il numero dei lati del poligono, s la somma degli angoli espressa in angoli retti, avremo dunque:

$$s = 2n - 4.$$

Facendo successivamente in questa formula $n = 4, 5, 6$, ec., si otterrà la somma degli angoli dei diversi poligoni, cioè:

Pel quadrilatero	4 retti.
„ pentagono	6 „
„ esagono	8 „
„ ettagono	10 „
„ decagono	16 „
„ pentadecagono	26 „

Teorema.

In un poligono convesso prolungando tutti i lati nello stesso verso, la somma di tutti gli angoli esterni così formati è sempre eguale a quattro retti (fig. 54).

Sia $ABCDE$ il dato poligono. Ogni angolo esterno unito coll'interno adiacente forma due retti. Se dunque il poligono ha n lati, la somma totale degli angoli fra esterni ed interni sarà $2n$ retti e siccome quella degli interni è $2n - 4$, quella degli esterni risulterà:

$$2n - (2n - 4) = 4 \text{ retti.}$$

COROLLARIO: *Un poligono convesso non ha più di tre angoli interni acuti.*

Ciò resulta dal non poter avere più di tre angoli esterni ottusi.

§ 17.

In un triangolo, se la retta tirata da un angolo sul mezzo del lato opposto, è eguale alla metà di questo lato, l'angolo da cui la retta fu condotta è retto; e viceversa in un triangolo rettangolo, il punto di mezzo dell'ipotenusa è egualmente distante dai tre vertici degli angoli. Alzare una perpendicolare all'estremità di una retta senza prolungarla.

Teorema.

Se in un triangolo la retta tirata da un angolo sul mezzo del lato opposto è eguale alla metà di questo lato, l'angolo da cui la retta fu condotta è retto; e viceversa in un triangolo rettangolo il punto di mezzo dell'ipotenusa è egualmente distante dai tre vertici (fig. 55).

1.° Sia AO la retta condotta dal vertice dell'angolo A al mezzo del lato BC , e si supponga $AO = BO = CO$. I triangoli AOC , AOB essendo isosceli, daranno le eguaglianze:

$$OAB = B, OAC = C,$$

sommandole viene:

$$BAC = B + C.$$

Ma nel triangolo BAC , si ha:

$$BAC + B + C = 2 \text{ retti},$$

e perciò rimpiazzando la quantità $B + C$ per la sua eguale BAC :

$$2 BAC = 2 \text{ retti},$$

e dividendo per 2: $BAC = 1 \text{ retto},$

come volevasi provare;

2.° Sia invece dato come retto l'angolo A , e si ammetta per un momento che la distanza AO dal vertice A , al mezzo dell'ipotenusa non sia eguale a BO ed OC , ma invece sia, per esempio, maggiore. Allora nel triangolo OAB essendo il lato $OA > OB$, l'angolo opposto al primo B sarà

maggiore dell'angolo OAB opposto al secondo; lo stesso caso verificandosi nel triangolo OAC , avrebbersi le due disuguaglianze:

$$B > OAB, C > OAC,$$

donde sommando membro a membro:

$$B + C > A.$$

Questo risultato è assurdo perchè invece essendo il triangolo ABC rettangolo:

$$B + C = A,$$

dunque è chiaro che non può essere la lunghezza OA maggiore della metà dell'ipotenusa. E siccome a un'altra falsità si giungerebbe col supporre OA minore di OB e OC , ne consegue che deve esistere eguaglianza fra queste tre linee, il che prova in modo indiscutibile la verità del teorema enunciato.

Problema.

Alzare una perpendicolare all'estremità di una retta senza prolungarla (fig. 56).

Sia AB la retta al cui estremo A , vuolsi elevare una perpendicolare. Si prenda un punto qualunque O al di fuori di AB e si riporti la lunghezza OA in OB , quindi si tiri OB e si prolunghi di una lunghezza OC eguale a sè stessa. Tirata AC , avremo la perpendicolare richiesta.

Difatto la retta AO tirata dal vertice A alla metà del lato opposto CB del triangolo ABC , essendo eguale alla metà di questo lato per il teorema precedente, l'angolo da cui si dipartì è retto, e perciò AC è la perpendicolare dimandata ad AB .

§ 18.

Ogni parallelogrammo ha i lati opposti eguali, gli angoli opposti eguali ed è diviso dalla diagonale in due triangoli eguali. Le diagonali di un parallelogrammo si tagliano vicendevolmente in parti eguali; sono eguali nel rettangolo e nel quadrato; inoltre in quest'ultimo e nel rombo sono perpendicolari fra loro. Un quadrilatero è un parallelogrammo nei quattro casi seguenti: 1.° Se due lati opposti sono eguali e paralleli; 2.° Se gli angoli opposti sono eguali due a due; 3.° Se i lati opposti sono eguali due a due; 4.° Se le diagonali si tagliano a vicenda in parti eguali.

Teorema.

In ogni parallelogrammo i lati e gli angoli opposti sono eguali, e la diagonale lo scompone in due triangoli eguali (fig. 57).

Sia $ABCD$ il parallelogrammo. Tirata la diagonale DB , l'avremo scomposto in due triangoli ABD , CBD che saranno eguali come aventi il lato BD comune, l'angolo $ADB = CBD$, come alterni-interni fra le parallele AD , BC tagliate dalla secante BD e $ABD = CDB$ come pure alterni-interni fra le altre parallele AB , CD intersecate pure dalle BD . Avremo dunque:

$$AB = CD, AD = BC, \text{ angolo } A = C.$$

Con ciò restano dimostrate le tre parti del Teorema in quistione.

Teorema.

Le diagonali di un parallelogrammo si tagliano scambievolmente per metà (fig. 58).

Sia O il punto d'intersezione delle diagonali BD , AC del parallelogrammo $ABCD$; i triangoli AOB , COD sono eguali perchè il lato $AB = CD$ come opposti del parallelogrammo, l'angolo $ODC = OBA$ come alterni-interni rapporto alle parallele AB , CD e la secante BD , e l'angolo $OCD = OAB$ per una ragione consimile. Per conseguenza il lato $OC = OA$ e $OB = OD$.

COROLLARIO 1.° *Le diagonali del rettangolo sono eguali* (fig. 59).

I triangoli ABD , ABC avendo un angolo retto compreso fra due lati rispettivamente eguali, saranno eguali e quindi l'ipotenusa $AC = BD$.

COROLLARIO 2.° *Le diagonali della losanga son perpendicolari* (fig. 60).

Difatto la diagonale BD avendo i punti B e D equidistanti dagli estremi A e C dell'altra diagonale AC le sarà perpendicolare sulla metà.

COROLLARIO 3.° *Le diagonali del quadrato sono eguali e perpendicolari.*

Difatti il quadrato è al tempo stesso un rettangolo e una losanga.

Teorema.

Un quadrilatero è parallelogrammo nei quattro casi seguenti (fig. 61):

- 1.° *Se due lati opposti sono eguali e paralleli;*
- 2.° *Se gli angoli opposti sono eguali due a due;*
- 3.° *Se i lati opposti sono eguali due a due;*
- 4.° *Se le diagonali si tagliano a vicenda in parti eguali.*

1.° Sia il lato AB eguale e parallelo a CD . I triangoli ABD , CBD saranno eguali per avere il lato BD comune, $AB = CD$ per ipotesi e l'angolo compreso $ABD = CDB$ come alterni-interni fra le parallele AB , CD secate da BD . Quindi l'angolo $DBC = BDA$; ma questi due angoli sono alterni-interni fra le rette CB , AD secate da BD e perciò queste rette son parallele e la figura $ABCD$ è parallelogrammo;

2.° Sia l'angolo $A = C$ e $B = D$. La somma degli angoli di un quadrilatero essendo 4 retti, avremo:

$$A + B + C + D = 4 \text{ retti,}$$

e sostituendo A a C , e B a D :

$$2A + 2B = 4 \text{ retti,}$$

donde dividendo per 2:

$$A + B = 2 \text{ retti},$$

e siccome gli angoli A e B sono interni dalla medesima parte rapporto alle rette AD , BC secate da AB , ne viene che queste rette debbono essere parallele.

In simil guisa si dimostrerebbe il parallelismo di AB e CD ;

3.° Abbiasi $AB = CD$ e $AD = BC$. I triangoli ABD , BCD saranno eguali per avere i tre lati eguali, quindi l'angolo $ABD = BDC$ e siccome questi due angoli sono alterni-interni fra le rette AB , CD secate da BD ne viene che queste rette debbano essere parallele. Egualmente l'angolo ADB essendo eguale a CBD per una ragione consimile a quella enunciata la BC sarà parallela ad AD , e la figura $ABCD$ risulterà un parallelogrammo;

4.° Sia $AO = OC$ e $BO = OD$. I due triangoli AOB , COD aventi due lati eguali e gli angoli compresi eguali perchè opposti al vertice risulteranno eguali, quindi l'angolo $OAB = OCD$, e siccome questi due angoli sono alterni-interni fra le rette AB , CD secate da AC , ne viene che queste rette debbono essere parallele.

In simil guisa dai triangoli OAD , OBC si dedurrebbe il parallelismo di AD e BC .

§ 19.

Dati due lati adiacenti e l'angolo compreso, costruire il parallelogrammo. Data la diagonale, costruire il quadrato; date le due diagonali costruire il rombo. Dato il valor comune delle due diagonali e l'angolo che fanno fra loro, costruire il rettangolo. Date le due diagonali e l'angolo compreso, costruire il parallelogrammo.

Problema.

Dati due lati adiacenti e l'angolo compreso, costruire il parallelogrammo (fig. 62).

Sieno A , B i lati e C l'angolo dato. Fatto un angolo $GDE = C$ si prendano sui suoi lati a partire dal vertice le

lunghezze $DE = A$, $DG = B$, quindi si tirino EF e GF parallele a DG e DE . La figura così formata $DEFG$ sarà evidentemente il parallelogrammo richiesto.

Problema.

Data la diagonale, costruire il quadrato (fig. 63).

Costruito un angolo retto si riportino sui suoi lati a partir dal vertice O le quattro lunghezze OB , OC , OD , OE eguali alla metà della data diagonale A . Si uniscano quindi B, C, D, E e la figura $BCDE$ sarà il dimandato quadrato.

I triangoli BOC , COD , DOE , BOE avendo infatti i due cateti eguali e un angolo retto saranno eguali e perciò lo saranno pure le ipotenuse BC , CD , DE , EB . Inoltre nel triangolo BED , per esempio, la retta EO che va dal vertice E alla metà del lato opposto essendo eguale alla metà di questo lato, l'angolo E è retto. Lo stesso potendo provarsi per tutti gli altri tre angoli, il quadrilatero $BCDE$ avrà angoli retti e lati eguali, e sarà perciò un quadrato.

Problema.

Date le due diagonali costruire la losanga (fig. 64).

Sieno A e B le diagonali date. Costruito un angolo retto si riportino sopra uno dei suoi lati le lunghezze OC , OD eguali alla metà di A , e sull'altro OE , OF eguali alla metà di B . Si conducano quindi CE , ED , DF , FC e avremo la losanga richiesta.

I triangoli OEC , OED sono difatto eguali per aver due lati e l'angolo compreso eguale, dunque $ED = EC$. In simil guisa si dimostrerebbe l'eguaglianza degli altri lati del quadrilatero che sarà perciò una losanga.

Problema.

Dato il valor comune delle due diagonali e l'angolo che fanno fra loro, costruire il rettangolo (fig. 65).

Sia A la diagonale e B l'angolo dato. Fatto un angolo $EOC = B$ si portino, a partire dal vertice sui suoi lati, le lunghezze OE , OD , OF , OC eguali alla metà della dia-

gonale, indi si uniscano i punti così determinati C, E, D, F . La figura $CEDF$ sarà il rettangolo richiesto.

Prima di tutto le diagonali tagliandosi in parti eguali, il quadrilatero è per certo un parallelogrammo ed i suoi lati opposti sono eguali. Indi si osserverà che i triangoli CDF, CEF avendo i tre lati eguali, saranno eguali e quindi l'angolo $ECF = DFC$. Ma questi due angoli sono interni dalla stessa parte rispetto alle parallele CE, DF secate da FC , dunque sommati insieme fanno due retti; essendo eguali risultan retti ciascuno. Una simile dimostrazione proverà che son retti gli angoli E e D . La figura $CEDF$ è perciò un rettangolo.

Problema.

Date le due diagonali e l'angolo compreso, costruire il parallelogrammo (fig. 66).

Sieno A e B le diagonali, C l'angolo dato. Fatto l'angolo $DOE = C$, si prendano sui suoi lati a partir dal vertice le lunghezze OE, OG eguali alla metà di A e OD, OF eguali alla metà di B . Si uniscano quindi i punti così determinati D, E, F, G e la figura $DEFG$ sarà il parallelogrammo richiesto.

Ciò è chiaro riflettendo che le diagonali si tagliano in parti eguali.

§ 20.

Trovare la misura comune di due rette date.

Misurare una retta significa trovare quante volte essa contiene l'unità di misura. L'unità di misura lineare è il metro i cui multipli e submultipli furon descritti in aritmetica.

Date due rette A e B (fig. 67) per averne la maggior comune misura si porti la più piccola B sull'altra A . Supposto dapprima che vi entri un numero esatto di volte, per esempio 5, è chiaro che la retta B sarà la più gran misura cercata.

Suppongasi in secondo luogo che A contenga B , 5 volte, con un resto che chiameremo R . La retta B non è più comune misura fra A e B , ma si potrà provare che la più gran comune misura fra A e B è la stessa di quella fra B e R . Difatto ogni comune misura fra A e B è contenuta un numero esatto di volte nelle linee A e $5B$ e perciò nella loro differenza R . Reciprocamente ogni comune misura di B ed R è contenuta un numero esatto di volte nelle linee $5B$ e R e per conseguenza nella loro somma A ; le due linee A e B hanno dunque le stesse comuni misure delle linee B e R . Quindi la più gran comune misura delle due prime è la stessa di quella fra le altre due. Si potrà dunque cercare la maggior comune misura fra B e R invece di cercarla fra A e B .

Per trovarla si porti R sopra B ; se essa vi è contenuta un numero esatto di volte, sarà la massima comune misura fra B ed R e perciò fra A e B . Al contrario se B contiene due volte R con un resto R' le comuni misure di B e R saranno le stesse di quelle fra R e R' . Continuando si giungerà a un resto che entrerà un numero esatto di volte nel precedente, e questo resto sarà la maggior comune misura fra le rette date A e B .

Suppongasi di aver trovato con questo metodo:

$$A = 5 B + R ,$$

$$B = 2 R + R' ,$$

$$R = 3 R' + R'' ,$$

$$R' = 4 R'' ,$$

R'' è allora la più gran comune misura dimandata.

È facile dopo ciò determinare il rapporto fra le rette A e B . Portando difatto il valore di R' nella terza eguaglianza, si avrà:

$$R = 13 R''$$

e sostituito a sua volta questo valore di R in quello di B e quest'ultimo nell'altro di A , ne dedurremo:

$$A = 163 R'' ,$$

$$B = 30 R'' .$$

Il rapporto adunque di A a B è lo stesso di quello dei numeri 163 e 30 vale a dire che la retta A eguaglia i $\frac{163}{30}$ dell'altra B .

Se le due rette A e B sono *incommensurabili* fra loro, cioè non hanno nessuna comune misura non si trova nessun resto che entri esattamente nel precedente e il rapporto di A a B non può aversi esatto, ma però è determinabile con quell'approssimazione che più si vuole.

Difatto divisa la retta B in m parti, si cerchi il più gran multiplo di una di esse contenuto in A . Sia per esempio, quest'ultima linea maggiore dell'ennesima e minore della $n + 1^{\text{esima}}$ parte; il rapporto di A a B sarà più grande di $\frac{n}{m}$ e minore di $\frac{n+1}{m}$. Prendendo adunque l'uno o l'altro di questi numeri pel valore del rapporto commetteremo un errore minore della frazione $\frac{1}{m}$, che si può render piccolo quanto si vuole, poichè decresce indefinitamente quando si dia al numero m dei valori sempre crescenti.

§ 21.

Che cosa s'intende per area di una figura. Unità adoperata nella misura della superficie. Figure equivalenti. Base ed altezza di un triangolo, di un parallelogrammo, di un trapezio.

Si chiama *area* di una figura la estensione superficiale da essa occupata.

Le aree si misurano riferendole ad una di esse, presa per unità. Quella generalmente adottata è il *metro quadro* ossia quadrato avente per lato il metro, unità lineare. E perciò quando si dice: la tal figura ha l'area di 12^{mq}, si intende che essa occupa lo stesso spazio superficiale di 12 quadrati aventi ciascuno il lato di un metro.

Due figure sono *equivalenti* quando senza avere la stessa forma hanno la medesima area. Da ciò ne consegue che due figure eguali son sempre equivalenti, mentre due figure equivalenti generalmente non sono eguali.

In un triangolo scelto un lato qualunque come *base* si chiama *altezza* la perpendicolare abbassata dal vertice opposto su questa base.

Si prende per *base* di un parallelogrammo uno qualunque dei suoi lati. Allora l'*altezza* è la distanza che passa fra la base e il lato opposto misurata perpendicolarmente ad ambedue.

Nel trapezio le *basi* sono i lati paralleli. *Altezza* è la perpendicolare comune alle due basi e fra esse intercetta.

§ 22.

Due parallelogrammi di basi eguali ed altezze eguali sono equivalenti. Quindi un parallelogrammo qualunque equivale ad un rettangolo di egual base e di eguale altezza. Ogni triangolo è metà di un parallelogrammo che abbia la medesima base e la medesima altezza, e quindi i triangoli di egual base ed altezza sono equivalenti.

Teorema.

Due parallelogrammi di egual base ed altezza sono equivalenti (fig. 68).

Sieno $ABCD$, $EFGH$ i dati parallelogrammi. Si porti il secondo sul primo per modo che le basi uguali AB , FG coincidano; essendo le due figure d'eguale altezza le basi superiori DC , EH verranno a situarsi sulla stessa linea retta e così $MABN$ rappresenterà la posizione presa dal secondo parallelogrammo. Ciò posto i triangoli CBN , MAD che hanno due lati eguali $AD = BC$, $MA = BN$ come opposti di parallelogrammo e l'angolo compreso $CBN = DAM$ come fatti da lati paralleli rivolti nello stesso verso saranno eguali. Ond'è che se dall'intera figura $DABN$ si toglie una volta il triangolo DAM , un'altra il triangolo CBN che sono eguali, i residui rimarranno equivalenti in superficie. Ma questi resti sono i parallelogrammi $ABCD$, $MABN$, dunque riman dimostrato il teorema in quistione.

COROLLARIO: *Un parallelogrammo qualunque è equivalente ad un rettangolo di egual base ed altezza.*

Ciò è evidente ove si rifletta che il rettangolo non è altro che un parallelogrammo, e perciò il corollario rientra completamente nel dimostrato teorema.

Teorema.

Ogni triangolo è metà di un parallelogrammo di equal base ed altezza (fig. 69).

Sia ABC il triangolo dato. Per i punti B ed A si conducano le parallele BD , AD ai due lati AC , BC del triangolo passanti per l'altro vertice; si formerà con ciò un parallelogrammo $ACBD$ avente equal base ed altezza del triangolo dato. Ora noi sappiamo che la sua diagonale AB lo scompone in due triangoli eguali e quindi ABC che è uno dei medesimi è realmente in superficie la metà di $ADBC$.

COROLLARIO: *Due triangoli di equal base ed altezza sono equivalenti.*

Difatto essi son ciascuno la metà di parallelogrammi equivalenti.

§ 23.

Due rettangoli di eguale altezza stanno fra loro come le loro basi e viceversa; perciò due parallelogrammi o due triangoli di eguale altezza stanno anche fra loro come le loro basi e viceversa. Due rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle rispettive basi per le rispettive altezze.

Teorema.

Due rettangoli di equal base stanno fra loro come le altezze e viceversa (fig. 70).

Sovrapposti i due rettangoli sulla base comune $ABCD$ si supponga dapprima che fra le altezze AF , AD esista una misura comune che entri, per esempio, 3 volte nella prima e 4 nella seconda linea. Pei punti di divisione a , b , ec., si conducano delle parallele alla base che divideranno il rettangolo $ABCD$ in 4 piccoli rettangoli eguali come aventi equal base ed altezza. Ora il rettangolo $ABEF$ ne contiene 3 e perciò si ha:

$$ABCD : ABEF :: 4 : 3.$$

E siccome anche:

$$AD : AF :: 4 : 3,$$

dalla combinazione di queste due proporzioni emana la 3.^a

$$ABCD : ABEF :: AD : AF.$$

Suppongasi in secondo luogo che le altezze AD , AF (*fig. 71*), sieno incommensurabili e si divida la seconda, per esempio, in dieci parti; si cerchi in seguito quante di queste parti son contenute nella AD . Se ve n'entrano 16 con un resto aD il rapporto di AD ad AF sta compreso fra 1, 6 e 1, 7. Si tirino quindi dai punti di divisione delle parallele alla base AB ; secondo ciò che sappiamo esse dividono il rettangolo $ABCD$ in tanti piccoli rettangoli equivalenti e mentre $ABEF$ ne contiene 10, $ABCD$ invece ne contiene più di 16 cioè 16 ed il resto $a b C D$. Dunque il rapporto delle due superfici $ABCD$, $ABEF$ sta pure compreso fra 1, 6 e 1, 7 ed è perciò a meno di un decimo eguale a quello delle altezze AD , AF . Ora se si fosse diviso invece la AF in 100, 1000, ec., parti eguali, si proverebbe che il rapporto dei rettangoli e quello delle altezze è eguale a meno di 0,01, 0,001, ec., e lo stesso dicasi per unità decimali di ordine qualunque, lo che ammette in definitiva la loro completa eguaglianza.

COROLLARIO 1.° *Due rettangoli di eguale altezza stanno fra loro come le basi.*

Si dimostra in modo identico.

COROLLARIO 2.° *Due parallelogrammi della stessa base stanno fra loro come le altezze e viceversa.*

Ciò è evidente, imperocchè i parallelogrammi sono equivalenti ai rettangoli di egual base e di altezza.

COROLLARIO 3.° *Due triangoli di egual base stanno fra loro come le altezze e viceversa.*

I triangoli essendo la metà dei rettangoli di egual base ed altezza, le due proprietà dimostrate per questi ultimi varranno anche per le prime figure.

Teorema.

Due rettangoli qualunque son proporzionati ai prodotti delle loro basi per le altezze.

Sieno R, R' le aree dei due rettangoli A, A' le altezze, B, B' le basi rispettive. Si costruisca un terzo rettangolo R'' con la base B del primo e l'altezza A' del secondo. Paragonando i rettangoli R, R'' pel teorema precedente avremo la proporzione:

$$R : R'' :: A : A',$$

paragonando poscia i rettangoli R'' ed R' per una consimil ragione sarà:

$$R'' : R' :: B : B',$$

moltiplicando le due proporzioni termine a termine e sopprimendo il fattore R'' comune ai primi due si ottiene:

$$R : R' :: A \times B : A' \times B',$$

come volevasi dimostrare.

§ 24.

L'area di un rettangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

L'area di un parallelogrammo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza. L'area di un triangolo è eguale alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza. L'area di un poligono qualunque si ottiene misurando separatamente ciascun triangolo in cui il poligono si può dividere e facendo la somma di tutte queste aree. L'area di un trapezio è eguale al prodotto della sua altezza per la semi-somma delle basi parallele.

Teorema.

L'area di un rettangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Abbiasi un rettangolo di base B e altezza A . Paragonatolo col quadrato unità di misura che ha 1 di base e 1 di altezza, avremo la proporzione:

$$R : 1 :: A \times B : 1,$$

donde:

$$R = A \times B.$$

Questa eguaglianza vuol però essere intesa nel suo vero significato. Essa non esprime, nè può esprimere che una superficie rettangolare sia la stessa cosa del prodotto di due linee, ma indica che le due quantità espresse in numeri hanno il medesimo valore, e in altri termini che il rettangolo dato contiene tanti quadrati unità di misura quanti sono espressi dal numero che è formato dal prodotto della sua base per l'altezza.

ESEMPIO. Le due dimensioni di un rettangolo essendo 2^m,5 e 3^m,3, la sua superficie sarà:

$$2,5 \times 3,3 = 8^{\text{m}}, 25,$$

ossia 8 metri quadri e 25 decimetri quadri.

COROLLARIO 1.° *L'area di un parallelogrammo è eguale al prodotto della sua base per l'altezza.*

Ciò è chiaro essendo il parallelogrammo equivalente al rettangolo di egual base ed altezza.

COROLLARIO 2.° *L'area di un quadrato è eguale alla seconda potenza del suo lato.*

Se nella formula $R = A \times B$, si fa $B = A$ con che il rettangolo è convertito in quadrato di lato A , si ottiene:

$$R = A^2.$$

Se, per esempio, il quadrato avesse 1^m,5 di lato, la sua superficie sarebbe:

$$m.^1 q.^1 2, 25.$$

COROLLARIO 3.° *L'area di un triangolo eguaglia il prodotto della base per la metà dell'altezza o dell'altezza per la metà della base, o alla metà del prodotto della base per l'altezza.*

Sia A l'altezza, B la base del triangolo. Il rettangolo costruito con una egual base ed altezza avrà per misura $A \times B$. Il triangolo essendo metà del rettangolo sarà dunque misurato da $\frac{A \times B}{2}$, il che corrisponde ai tre enunciati del corollario.

ESEMPIO.

Sia: $A = 1^{\text{m}}, 15, B = 2^{\text{m}}, 20.$

La superficie del triangolo sarà di:

$$\frac{1,15 \times 2,20}{2} = \frac{2,5300}{2} = 1^{\text{m}}, 2650,$$

cioè 1 metro quadro, 26 decimetri e 50 centimetri quadrati.

Teorema.

L'area di un poligono si ottiene decomponendolo in triangoli e facendo la somma di tutte queste aree triangolari (fig. 72).

Se il poligono $ABCDE$ è decomposto nei triangoli ABC , ACD , ADE per mezzo di diagonali che partono dal vertice A è chiaro che la somma delle aree parziali ABC , ACD , ADE forma quello totale $ABCDE$.

Teorema.

L'area di un trapezio è eguale al prodotto della sua altezza per la semi-somma delle basi (fig. 73).

Si prolunghi la base maggiore DC del trapezio di una lunghezza CE eguale all'altra base AB , indi si tiri AE . I due triangoli ABG , CEG avranno il lato $CE = AB$ per costruzione, l'angolo $GEC = GAB$ come alterni-interni fra le parallele AB , DE secate da AE e l'angolo $GCE = GBA$ per una consimil ragione saranno dunque eguali. Perciò se dall'intiero trapezio $ABCD$ togliesi il triangolo ABG per aggiungervi l'altro GCE , la figura risultante ADE sarà equivalente al detto trapezio. Ma il triangolo ha per misura:

$$\frac{AL(CD + CE)}{2},$$

dunque tal misura sarà anche quella del trapezio, e così avremo:

$$ABCD = \frac{AL(CD + CE)}{2} = \frac{AL(CD + AB)}{2},$$

come si voleva dimostrare.

ESEMPIO. Siano le due basi del trapezio $2^{\text{m}}, 5$, e 2^{m} ; l'altezza $3^{\text{m}}, 5$; la sua superficie sarà:

$$\frac{(2 + 2.5)}{2} 3^{\text{m}}, 5 = 7^{\text{m}}, 875.$$

§ 25.

Trasformare un poligono in un triangolo equivalente. . .

Trasformare un poligono in un triangolo equivalente (fig. 74).

Questo problema si risolve per diminuzione successiva del numero dei lati del poligono. Sia, per esempio, il pentagono $ABCDG$. Si tiri la diagonale BD che toglie dal pentagono il triangolo BDC e si conduca dal vertice C la CF parallela a BD prolungandola fino all'incontro del prolungamento di AB . Si unisca infine F con D . Il triangolo FBD è equivalente a CBD , perchè hanno la stessa base BD e eguale altezza trovandosi i loro vertici sulla parallela CF alla base. Dunque se nel pentagono dato si rimpiazza il triangolo CBD con l'equivalente FBD , il nuovo poligono che è un quadrilatero $AGDF$ ha la stessa area di quello dato. Per conseguenza il numero dei lati del poligono primitivo venne con questa costruzione a diminuirsi di una unità. Applicando poscia al quadrilatero $AGDF$ un simile processo lo si trasforma nel triangolo DEF .

COROLLARIO. Se in generale si ha un poligono di n lati per trasformarlo in triangolo, occorrono $n - 3$ operazioni successive.

§ 26.

Se in un triangolo si conduce una retta parallela ad un lato, gli altri due lati son divisi in parti proporzionali e viceversa. La retta che divide per metà un angolo di un triangolo, divide il lato opposto a questo angolo in parti proporzionali agli altri due lati.

Teorema. . .

Ogni retta parallela a uno dei lati di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali (fig. 75).

Sia DE parallela al lato BC del triangolo ABC . Si supponga dapprima che fra le parti AD , BD del lato AB esista

una comune misura che entra, per esempio, 3 volte in BD e 2 in AD ; noi avremo la proporzione:

$$AD : BD :: 2 : 3.$$

Dai punti di divisione si conducano le rette FG , LI , MN parallele a BC , DE ; vuolsi avanti ogni altra cosa provare che esse dividono pure in parti eguali anche il lato AC . Infatti dal punto F scelto a piacere fra quelli di divisione si conduca FP parallela ad AE . I triangoli AFG , FPD sono eguali perchè i lati AF , FD lo sono per ipotesi, l'angolo $DFP = FAG$ come corrispondenti fra le parallele FP , AC tagliate da AD ed $FDP = AFG$ per una consimil ragione; quindi $FP = AG$. Ma $FP = GE$ come lati opposti di un parallelogrammo, dunque $AG = GE$; lo stesso si prova per tutte le altre divisioni del lato AC .

Ora la parte AE contiene 2 di queste divisioni, mentre EC ne contiene 3; ne viene perciò che:

$$AE : CE :: 2 : 3.$$

Dal paragone di questa proporzione con quella precedentemente trovata ne viene la definitiva

$$AD : BD :: AE : CE.$$

Si supponga in secondo luogo che i segmenti AB , BD (fig. 76) sieno incommensurabili fra di loro; diviso allora il secondo in dieci parti, si cerchi quante di queste parti son contenute in AD ; ve ne entrino, per esempio 14, con un resto DF , è chiaro che il rapporto di AD a BD sarà compreso fra i numeri 1,4 e 1,5. Si conducano quindi dai punti di divisione di AB delle parallele a BC ; per la dimostrazione precedente esse divideranno CE in 10 parti eguali e una di dette parti entrerà 14 volte con un resto in AE . Il rapporto dunque di AE e CE sarà compreso fra i numeri 1,4 e 1,5 e potrà perciò ritenersi a meno di un decimo eguale a quello di AD a BD .

Dividendo invece BD in 100, 1000, ec., parti eguali, si proverebbe con un identico ragionamento che i rapporti $\frac{AD}{BD}$,

$\frac{AE}{CE}$ sono eguali a meno di 0, 01, 0, 001, ec., e in generale per unità decimali di ordine qualunque, il che implica la loro eguaglianza definitiva.

COROLLARIO 1.^o *Dalla proporzione:*

$$AD : BD :: AE : CE,$$

componendo per somma se ne deducono le altre due:

$$\begin{aligned} AD + BD : AD &:: AE + CE : AE, \\ AD + BD : BD &:: AE + CE : CE, \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} AB : AD &:: AC : AE, \\ AB : BD &:: AC : CE, \end{aligned}$$

il che prova esservi proporzionalità anche fra i lati intieri e le parti in cui furon divisi.

COROLLARIO 2.^o *Più parallele intercettano parti proporzionali su due rette convergenti (fig. 77).*

Sieno AB , CD , EF le date parallele ed AE , BF le due convergenti. Pel punto A si conduca AG parallela a BF . La retta CD parallela al lato EG del triangolo AEF dividerà gli altri due lati in parti proporzionali, quindi:

$$AC : CE :: AL : LG.$$

Ma $AL = BD$ e $LG = DF$ come lati opposti di parallelogrammi, dunque questa proporzione può cambiarsi nell'altra:

$$AC : CE :: BD : DF.$$

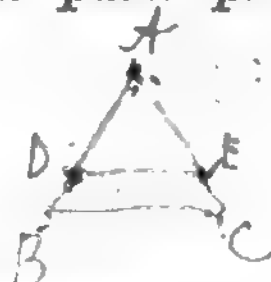
Teorema.

Ogni retta che divide due lati di un triangolo in parti proporzionali è parallela al terzo lato (fig. 78).

Sia DE una retta tale che:

$$AD : BD :: AE : EC.$$

Se pel punto D si immagina condotta la parallela a BC , essa deve dividere il lato AC in parti proporzionali ad AD e BD ; essa adunque incontra le AC nel punto E che la



divide nel detto rapporto, o in altri termini si confonde con la DE .

Teorema. . .

La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati (fig. 79).

Sia AD la bisettrice dell'angolo A . Conducasi per il punto C la retta CE parallela ad AD e prolunghiamola fino all'incontro in E con la BA . Avremo allora nel triangolo BCE considerata la parallela AD al lato CE che:

$$BD : DC :: AB : AE.$$

Ma essendo AD parallela a CE l'angolo ECA eguaglia il suo alterno interno CAD eguale a sua volta a BAD e quest'ultimo al suo corrispondente AEC . Talchè il triangolo AEC che ha due angoli eguali risulta isoscele e $AE = AC$. Fatta questa sostituzione nella proporzione di sopra essa diventa:

$$BD : DC :: BA : AC,$$

come volevasi provare.

§ 27.

Trovare una quarta proporzionale dopo tre rette date. Sopra una retta data fare un rettangolo equivalente ad un rettangolo dato. Da un punto preso dentro un angolo condurre una retta tale che le parti comprese fra il punto dato e i due lati dell'angolo sieno fra loro in un rapporto dato. Dividere una retta: 1.° In un numero di parti eguali; 2.° In parti proporzionali a rette o numeri dati.

Si dice che una retta è *quarta proporzionale* dopo tre altre quando forma il quarto termine di una proporzione di cui le altre sono i primi tre.

Problema.

Costruire la quarta proporzionale dopo tre rette date (fig. 80).

Sieno A, B, C le rette. Fatto un angolo qualunque si prendano sopra uno dei suoi lati le lunghezze $EG = A$,

$GF = B$, e sull'altro lato la distanza $EL = C$. Si tiri GL e pel punto F la FM parallela a GL che determinerà in LM la quarta proporzionale richiesta.

Difatto nel triangolo EMF , la retta LG essendo parallela al lato FM , si ha:

$$EG : GF :: EL : LM,$$

ovvero:
$$A : B :: C : LM.$$

Problema.

Sopra una retta data fare un rettangolo equivalente ad un rettangolo dato (fig. 81).

Sia $ABCD$ il rettangolo e FG la retta data. Prolungata di una lunghezza $GL = CD$ e presa sulla perpendicolare FM a FG la distanza $FN = DA$, si compia la costruzione della 4.^a proporzionale MN dopo FG , GL e FN , indi riportata MN da F in E si tracci il rettangolo $FGHE$ che sarà quello richiesto.

Essendo difatto la FE quarta proporzionale dopo FG , DC e DA , si ha:

$$FG : DC :: DA : FE,$$

e facendo il prodotto degli estremi eguale a quello dei medii:

$$FG \times FE = DC \times DA.$$

Ora $FG \times FE$ rappresenta l'area del rettangolo $EF GH$, come $DC \times DA$ esprime quella del rettangolo $ABCD$; ond'è che questi due rettangoli sono equivalenti.

Problema.

Da un punto preso dentro un angolo condurre una retta tale che le parti comprese tra il punto e i due lati dell'angolo sieno tra loro in un rapporto dato (fig. 82).

Sia O il punto, A l'angolo dato e il rapporto sia, per esempio, quello di 4 a 3. Pel punto O si conduca OD parallela a AC , indi misurata la lunghezza AD se ne riportino

i $\frac{3}{4}$ da D in B e si tiri OB che sarà la retta richiesta. Difatto nel triangolo BAC la retta OD essendo parallela al lato AC , si ha:

$$BO : OC :: BD : AD.$$

Ma : $BD : AD :: 3 : 4.$

Dunque anche: $BO : CO :: 3 : 4.$

Problema.

Dividere una retta in un numero qualunque di parti eguali (fig. 83).

Sia la retta AB da dividersi in 5 parti eguali. Si faccia al punto A un angolo qualunque BAC e si porti 5 volte di seguito sul lato AC la lunghezza arbitraria AD . Sia C il quinto punto determinato; si tiri CB e pei punti G, F, E, D si conducano le rette Gd, Fc , ec., parallele a BC e che determineranno la divisione della AB in parti eguali.

Noi sappiamo difatto che quando più parallele son tagliate da due convergenti le parti intercette sopra quest'ultime sono proporzionali. Ora le parti scelte sulla AC essendo eguali, dovrà esser lo stesso per quelle prese sulla AB .

Problema.

Dividere una retta in parti proporzionali o rette o numeri date (fig. 84).

1.° Sia la retta AB da dividersi in parti proporzionali alle rette M, N, P . Fatto al punto A un angolo qualunque BAC si prendano sul lato AC le distanze $AE = M, ED = N, DC = P$, indi tirata CB si conducano dei punti D ed E le parallele DF, EG a quest'ultima linea che divideranno la AB nel modo richiesto.

Difatto per la nota proprietà delle parallele tagliate da due rette convergenti, si ha:

$$AG : GF : FB :: AE : ED : DC,$$

ossia: $AG : GF : FB :: M : N : P.$

2.° Sia la retta AB (*fig. 85*) da dividersi in parti proporzionali ai numeri 2, 3 e 4. Fatto un angolo qualunque BAF , sul lato AF si porti una lunghezza arbitraria 2 volte da A in D , tre volte da D in E e 4 da E in F . Tirata quindi FB si conducano le rette EG , DH parallele alla medesima e che determineranno la richiesta divisione della AB .

Difatto per le proprietà delle parallele tagliate da due convergenti, si ha:

$$AH : HG : GB :: AD : DE : EF.$$

Ma: $AD : DE : EF :: 2 : 3 : 4,$

, quindi anche: $AH : HG : GB :: 2 : 3 : 4.$

§ 28.

Definizione dei poligoni simili. Due triangoli sono simili: 1.° Se sono equiangoli; 2.° Se hanno i lati proporzionali; 3.° Se hanno un angolo eguale contenuto fra lati proporzionali; 4.° Se hanno i lati rispettivamente paralleli; 5.° Se hanno i lati rispettivamente perpendicolari. Sopra una retta data costruire un triangolo simile ad un triangolo dato.

Due poligoni dello stesso numero di lati sono *simili* quando hanno gli angoli eguali uno ad uno ed i lati adiacenti agli angoli eguali sono proporzionali e similmente disposti. Si dice che due vertici, due lati, due angoli, due diagonali di poligoni simili sono *omologhi* quando si corrispondono.

Rapporto di similitudine di due poligoni è il rapporto costante dei lati omologhi.

Teorema.

Due triangoli equiangoli sono simili (*fig. 86*).

Sieno ABC , DEF i dati triangoli che hanno l'angolo $A = D$, $B = E$, $C = F$. Si porti il secondo sul primo per modo che l'angolo D coincida con quello A e siano AE' , AF' , le posizioni prese dai lati DE , DF . Avendosi per ipotesi $E = A' E' F' = B$, siccome questi due ultimi angoli sono,

alterni-interni fra le rette BC , $E'F'$ secate da AB ne viene che queste rette debbono essere parallele. In conseguenza sussisterà la proporzione:

$$AB : AE' :: AC : AF',$$

che può cambiarsi nell'altra:

$$AB : DE :: AB : DF.$$

Sovrapponendo al modo stesso gli angoli B ed E , oppure C ed F , si giunge ad una chiara prova della completa proporzionalità fra i tre lati dei due triangoli. Onde vedesi come essi oltre all'avere gli angoli eguali, abbiano pure i lati omologhi proporzionali e siano perciò simili.

Teorema.

Due triangoli che hanno i lati omologhi proporzionali son simili (fig. 87).

Sieno ABC , DEF , i dati triangoli. Si prenda sopra AB una lunghezza $AG = DE$ e si tiri dal punto G la GH parallela a BC . I triangoli AGH , AEC resulteranno equiangoli come aventi l'angolo A comune, $AGH = B$ e $AHG = C$ come corrispondenti fra le parallele GH e BC tagliate rispettivamente dalle secanti AB , AC . Per conseguenza detti triangoli saranno simili e avranno i lati omologhi proporzionali. Ora i lati del triangolo DEF son, per ipotesi, proporzionali a quelli del triangolo ABC , dunque lo son pure a quelli del triangolo AGH , in guisa che si ha:

$$AG : DE :: AH : DF :: GH : EF.$$

Ma $AG = DE$, per conseguenza deve essere $AH = DF$ e $GH = EF$. Ond'è che i triangoli AGH , DEF avendo i tre lati eguali sono eguali e siccome AGH è simile a ABC , lo sarà pure DEF .

Teorema.

Due triangoli che hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali son simili (fig. 88).

Sieno ABC , DEF i dati triangoli che hanno l'angolo $A = D$ e i lati AB , AC , DE , DF in proporzione.

Si prenda sopra AB una lunghezza $AG = DE$ e si tiri dal punto G la GH parallela a BC . I triangoli AGH , ABC saranno equiangoli, quindi simili, e i loro lati omologhi saranno in proporzione. Avremo dunque:

$$AB : AG :: AC : AH;$$

ma per ipotesi si ha pure:

$$AB : DE :: AC : DF.$$

Paragonate queste due proporzioni ed osservato essere eguali i tre primi termini di ciascuna, ne viene che debbono esserlo anco i quarti e cioè $AH = DF$. Ond'è che i triangoli AGH , DEF avendo due lati e l'angolo compreso eguale saranno eguali, e siccome AGH è dimostrato esser simile ad ABC , lo sarà pure DEF .

Teorema.

Due triangoli che hanno i lati paralleli o perpendicolari sono simili.

Si indichino con A , B , C , gli angoli del primo triangolo, con A' , B' , C' quelli del secondo. Noi abbiamo altrove dimostrato che gli angoli a lati paralleli o perpendicolari debbono essere eguali o supplementari. Talchè sugli angoli dei due triangoli dati non saranno ammissibili, se non che le 4 ipotesi seguenti:

$$1.^{\circ} \begin{cases} A + A' = 2 \text{ retti} \\ B + B' = 2 \text{ retti} \\ C + C' = 2 \text{ retti}; \end{cases} \quad 2.^{\circ} \begin{cases} A + A' = 2 \text{ retti} \\ B + B' = 2 \text{ retti} \\ C = C'; \end{cases}$$

$$3.^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} A + A' = 2 \text{ retti} \\ B = B' \\ C = C'; \end{array} \right. \quad 4.^{\circ} \left\{ \begin{array}{l} A = A' \\ B = B' \\ C = C'. \end{array} \right.$$

Se non che riflettendo bene si scorge che le prime due ipotesi non posson realmente sussistere, giacchè porterebbero la somma degli angoli de' due triangoli al di sopra di 4 retti. Non riman dunque se non che la quarta e la terza che ne è un caso particolare, giacchè dall'aversi $B = B'$, $C = C'$ ne viene di conseguenza $A = A'$. Ora tanto l'una che l'altra portano all'essere i triangoli dati equiangoli e per conseguenza simili.

Problema.

Sopra una retta data costruire un triangolo simile ad un triangolo dato (fig. 89).

Sia ABC il triangolo e DE la retta data che si suppone, per esempio, l'omologa di BC . Si faccia al punto D l'angolo $FDE = B$ e al punto E l'angolo $FED = C$ e verrà costruito il triangolo richiesto.

Difatto i due triangoli ABC , DEF avendo due angoli rispettivamente eguali sono equiangoli e per conseguenza anche simili.

§ 29.



Due rette parallele son tagliate in parti proporzionali da un numero qualunque di rette condotte da un medesimo punto.

Teorema.

Due rette parallele son tagliate in parte proporzionali da più rette convergenti nel medesimo punto (fig. 90).

Sieno AB , CD le parallele tagliate dalle rette OC , OG , OH , OD tutte convergenti in O . Considerati i due triangoli equiangoli e perciò simili OAE , OCG , si ha la proporzione:

$$AE : CG :: OE : OG.$$

Gli altri due triangoli simili OEF , OGH danno invece:

$$EF : GH :: OE : OG,$$

dalle quali due proporzioni combinate emana la terza:

$$AE : CG :: EF : GH,$$

che comprova il teorema per le tre convergenti OC , OG , OH . Proseguendo in modo simile, lo si dimostra per tutte le altre.

§ 30.

Se dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassa una perpendicolare sopra l'ipotenusa: 1.° La perpendicolare divide il triangolo in due altri triangoli rettangoli simili al primo e simili fra loro; 2.° Ciascun cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e il segmento adiacente di essa; 3.° La perpendicolare è media proporzionale fra i due segmenti dell'ipotenusa; 4.° Il quadrato dell'ipotenusa ed i quadrati dei cateti stanno fra loro come l'ipotenusa ed i segmenti adiacenti ai cateti.

Teorema.

Se dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassa una perpendicolare sull'ipotenusa:

1.° *Questa perpendicolare decompone il triangolo in due altri simili al totale e simili fra loro;*

2.° *Ogni cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e il segmento adiacente della medesima;*

3.° *La perpendicolare è media proporzionale fra i due segmenti dell'ipotenusa;*

4.° *Il quadrato dell'ipotenusa ed i quadrati dei cateti stanno fra loro come l'ipotenusa ed i segmenti adiacenti (fig. 91).*

1.° Sia ABC il triangolo rettangolo in A . Considerando, per esempio, i triangoli ABC , ABD si vede che essi hanno l'angolo B comune, l'angolo $BDA = BAC$ come amendue retti. Questi triangoli son dunque equiangoli e di conseguenza simili. Al modo stesso si dimostra la similitudine di ABC e ACD . Quindi i due triangoli ABD , ACD equiangoli e simili amendue con ABC , saranno equiangoli e simili fra di loro.

2.° Dalla similitudine dei triangoli ABC e ABD , oppure ABC e ACD , si deduce la proporzionalità dei loro lati omologhi. Si ha perciò:

$$\begin{aligned} BC : AB &:: AB : BD, \\ BC : AC &:: AC : CD; \end{aligned}$$

3.° Nei triangoli simili ABD , ACD , i lati omologhi sono pure in proporzione. Ne viene dunque che:

$$BD : AD :: AD : CD;$$

4.° Dalla prima proporzione trovata nel n.° 2 del teorema, si deduce:

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD.$$

E siccome identicamente:

$$\overline{BC}^2 = BC \times BC,$$

dividendo le due eguaglianze membro a membro, risulta:

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{BC}{BD},$$

oppure: $\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : BD.$

Una simil dimostrazione si può ripetere per l'altro cateto AC .

§ 31.

In ogni triangolo rettangolo il quadrato fatto sopra l'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra i due cateti. Rapporto fra la diagonale e il lato del quadrato.

Teorema.

Il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti (fig. 92).

Sia ABC il triangolo rettangolo in A e siano $BCDE$, $ABFG$, $ACIH$ i quadrati costruiti sui suoi tre lati. Si abbassi dal vertice A la perpendicolare AM sull'ipotenusa

prolungandola fino in L ; essa scompartisce il quadrato $BCDE$ in due rettangoli $CDLM$, $BELM$ che si proverà essere ognuno equivalente a quello dei quadrati dei cateti che si trova dalla sua parte. Difatto il rettangolo, per esempio, $CMLD$ è doppio del triangolo ACD di egual base CD ed altezza $CM = AV$. Similmente il quadrato $CAHI$ è doppio del triangolo CBI . Ora i triangoli CBI , ACD hanno il lato $AC = CI$ e $BC = CD$ come lati rispettivi dello stesso quadrato, e l'angolo compreso $ICB = ACD$ come composti ciascheduno di un angolo retto e dello stesso angolo ACB . Sono dunque eguali e perciò il rettangolo $CMLD$ e il quadrato $CAHI$ saranno equivalenti.

Si proverebbe al modo stesso l'equivalenza di $BELM$ e $BAGF$, per conseguenza la somma dei due rettangoli $CDLM$, $BELM$ che costituisce il quadrato fatto sull'ipotenusa equivarrà alla somma de' quadrati $CAHI$, $ABFG$ fatti sui due cateti.

SOLIO. Questa eguaglianza si scrive sotto la forma:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Essa può servire a trovare un lato di un triangolo rettangolo quando sien cogniti gli altri due.

ESEMPIO.

Sia: $AB = 4^m$, $AC = 3^m$,

avremo: $\overline{BC}^2 = 4^2 + 3^2 = 25$,

donde: $BC = \sqrt{25} = 5^m$.

Sia invece: $BC = 7^m, 5$, $AB = 4^m, 5$,

ne verrà: $\overline{AC}^2 = (7, 5)^2 - (4, 5)^2 = 36$,

donde: $AC = \sqrt{36} = 6^m$.

COROLLARIO. Il rapporto della diagonale al lato del quadrato è incommensurabile (fig. 93).

Essendo $ABCD$ il quadrato, il triangolo ABC sarà rettangolo ed isoscele, ed avremo:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = 2 \overline{AB}^2,$$

donde: $AC = AB\sqrt{2}$ e $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$.

Si può però determinare approssimativamente la diagonale quando sia cognito il lato e viceversa. Sia, per esempio, $AB = 2^m$, e vogliasi conoscere la diagonale a meno di un centimetro.

Noi abbiamo: $\overline{AC}^2 = 2 \times 2^2 = 8$,

donde: $AC = \sqrt{8} = 2^m, 82$.

Viceversa se fosse $AC = 2^m$ si avrebbe:

$$\overline{AB}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{2} = 2,$$

donde: $AB = 1^m, 41$.

In generale detta D la diagonale e L il lato del quadrato, la relazione $D^2 = 2 L^2$, ovvero $D = L\sqrt{2}$ serve a determinare una delle quantità, quando l'altra è cognita.

§ 32.

In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, più due volte il prodotto di uno di questi lati pel suo prolungamento compreso fra l'angolo ottuso e la perpendicolare abbassata dall'angolo opposto.

Teorema.

In un triangolo ottusangolo il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo ottuso è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, aumentato di due volte il rettangolo che avesse per dimensioni uno di questi lati e il suo prolungamento compreso fra il vertice dell'angolo ottuso e la perpendicolare abbassata dal vertice opposto (fig. 94).

Sia ABC un triangolo nel quale il lato BC è opposto all'angolo ottuso BAC e siano $BCDE$, $ABFG$, $CAHI$ i quadrati costruiti sui suoi tre lati. Si abbassino le perpendicolari AP , BN , CK dai tre vertici del triangolo sui lati opposti prolungandole, si formeranno così sei rettangoli

$COPD$, $BOPE$, $BLKF$, $GALK$, $AHNM$, $CMNI$. Si dimostrerà ora che due rettangoli prossimi sono equivalenti, e cioè $COPD$ con $MNCI$, $BOPE$ con $BLKF$ e $GKLA$ con $AMNH$. Considerati difatti per esempio i primi due, si osserva che l'area del rettangolo $COPD$ è doppia di quella del triangolo ACD , giacchè le due figure hanno egual base CD ed eguale altezza, essendo il vertice A sul prolungamento della base superiore del rettangolo; per una simil ragione l'area del rettangolo $CMNI$ è doppia di quella del triangolo CBI . Ora i due triangoli CBI , ACD sono eguali come aventi il lato $CD = CB$ e $CA = CI$ come lati rispettivi degli stessi quadrati, e l'angolo compreso $ACD = BCI$ come formati ciascuno da un retto, più lo stesso angolo ACB . E perciò se i triangoli sono eguali, i rettangoli saranno equivalenti.

Una dimostrazione identica si ripeterebbe per $BOPE$, $BLKF$ come anche per $ALKG$, $AMNH$. Per conseguenza il quadrato $BCDE$ somma dei rettangoli $COPD$ e $BOPE$ è equivalente alla somma dei rettangoli $CMNI$, $BLKF$, e si ha:

$$BCDE = CMNI + BLKF.$$

Ma dietro l'ispezione della figura:

$$CMNI = CAHI + AHNM,$$

$$BLKF = BAGF + ALKG,$$

onde:

$$BCDE = CAHI + BAGF + AHNM + ALKG,$$

ossia per l'equivalenza di $AHNM$ con $ALKG$:

$$BCDE = CAHI + BAGF + 2AHNM.$$

Ora la misura del rettangolo $AHNM$ essendo:

$$AM \times AH = AM \times AC,$$

riman comprovato il teorema in quistione.

ALTRA DIMOSTRAZIONE. Nel triangolo rettangolo BMC si ha pel teorema precedente:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MC}^2.$$

Ora: $CM = AC + AM,$

quindi elevando a quadrato:

$$\overline{CM}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AM}^2 + 2 AC \times AM.$$

Nell'altro triangolo rettangolo $AMB,$

$$\overline{MB}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{AM}^2,$$

indi sommando le ultime due eguaglianze, e riducendo:

$$\overline{CM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BA}^2 + 2 AC \times AM,$$

e perciò anche:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BA}^2 + 2 AC \times AM,$$

come si voleva dimostrare.

§ 33.

In qualunque triangolo il quadrato di un lato opposto ad un angolo acuto è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno due volte il prodotto di uno di questi lati pel suo segmento compreso fra l'angolo acuto e la perpendicolare abbassata dall'angolo opposto.

Teorema.

In un triangolo il quadrato costruito sopra un lato opposto ad un angolo acuto è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, meno due volte il rettangolo costruito sopra uno di questi lati e sul suo segmento compreso fra l'angolo acuto e la perpendicolare abbassata dal vertice opposto (fig. 95).

Sia CB il lato opposto all'angolo acuto A del triangolo ABC e siano $BCDE$, $ABFG$, $ACIH$ i quadrati costruiti sui suoi tre lati. Si abbassino le perpendicolari AL , BP , CM dai tre vertici sui lati opposti prolungandole. Esse formeranno sei rettangoli $CKDL$, BEK , $BFMN$, $MNAG$, $AHPO$, $POCI$. Si dimostra, come nel teorema precedente, l'equivalenza due a due di questi rettangoli, donde ne viene che il quadrato $BCDE$ somma dei rettangoli $CDLK$ ed

$LKBE$ può anche considerarsi qual somma degli altri due rettangoli $BFNM$ e $CIP O$, talchè si ha:

$$BCDE = BFNM + CIP O,$$

ma dietro l'ispezione della figura:

$$BFNM = BAGF - ANMG,$$

$$CIP O = CIHA - OPHA.$$

Quindi sostituendo e tenendo conto dell'equivalenza di $ANMG$ e $OPHA$, ne vienè:

$$BCDE = BAGF + CIHA - 2ANMG$$

e siccome la misura di $ANMG$ è data da:

$$AN \times AG = AN \times AB,$$

riman comprovato il nostro teorema.

ALTRA DIMOSTRAZIONE. Nel triangolo rettangolo BCN , si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{NC}^2,$$

ma:

$$BN = AB - AN,$$

indi elevando al quadrato:

$$\overline{BN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AN}^2 - 2AB \times AN$$

Nel triangolo pure rettangolo ANC :

$$\overline{NC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AN}^2$$

Sostituendo i due valori di \overline{BN}^2 e \overline{NC}^2 in quello di \overline{BC}^2 e riducendo, resta in definitiva:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \times AN.$$

§ 34.

15

Trovare una média proporzionale fra due rette date. Costrurre un quadrato equivalente ad un paralelogrammo, ad un trapezio o ad un poligono qualunque dato. Trovare due rette la cui ragione sia quella: 1.° Di due quadrati dati; 2.° Di due poligoni qualunque dati. Costrurre un quadrato equivalente alla somma od alla differenza di due quadrati dati. Espressione dell'area di un triangolo in funzione dei suoi lati.

Problema.

Trovare una media proporzionale fra due rette date (fig. 96).

Sieno A e B le rette date. Riportate sopra una retta indefinita le lunghezze $CD = A$, $DE = B$ si descriva sulla CE considerata qual diametro una mezza circonferenza; al punto D si innalzi DF perpendicolare a CE prolungandola fino all'incontro della curva, e questa retta DF sarà la media proporzionale dimandata.

Difatto se si tirano le tre rette CF , FE , FO , la retta FO essendo eguale alle due metà CO , OE di CE ne consegue che l'angolo in F debba esser retto, e perciò rettangolo il triangolo CFE . Ora nel triangolo rettangolo la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa è appunto media proporzionale fra i due segmenti di questa ultima linea.

Problema.

Costrurre un quadrato equivalente ad un paralelogrammo, ad un triangolo, ad un trapezio, o ad un poligono qualunque dati.

1.° Si indichi con A l'altezza, B la base del paralelogrammo ed X il lato incognito del quadrato. Le superfici delle due figure essendo date rispettivamente da $A \times B$ e X^2 per la loro equivalenza deve essere:

$$A \times B = X^2,$$

e traducendo questa eguaglianza in proporzione:

$$A : X :: X : B,$$

dunque il lato incognito del quadrato è medio proporzionale fra la base e l'altezza del parallelogrammo e può determinarsi col metodo del problema precedente.

2.° Sia A l'altezza e B la base del triangolo, X il lato incognito del quadrato. Le superfici delle due figure essendo date rispettivamente da $\frac{A \times B}{2}$ e X^2 per la loro equivalenza deve essere:

$$\frac{A \times B}{2} = X^2,$$

e traducendo in proporzione:

$$\frac{A}{2} : X :: X : B.$$

Il problema è dunque ridotto alla determinazione di una media proporzionale fra la metà dell'altezza e la base del triangolo.

3.° Sieno B, B' le basi parallele, A l'altezza del trapezio e X il lato incognito del quadrato. Le superfici delle due figure essendo date rispettivamente da $\frac{A}{2} (B + B')$ e X^2 per la loro equivalenza deve essere:

$$\frac{A}{2} (B + B') = X^2$$

e traducendo in proporzione:

$$\frac{A}{2} : X :: X : B + B'.$$

Il problema è dunque ridotto alla determinazione di una media proporzionale fra la metà dell'altezza e la somma delle basi del trapezio.

4.° Si trasforma il poligono in triangolo col metodo cognito e quindi si opera come al n.° 2.

Problema.

Trovare due rette la cui ragione sia eguale a quella:

1.° *Di due quadrati dati;*

2.° *Di due poligoni qualunque dati.*

1.° Piano A e B (fig. 97) i lati dei due quadrati. Presa una lunghezza CD eguale alla maggiore di queste rette si

descriva sulla medesima, considerata qual diametro, una mezza circonferenza. Si prenda a partire da C la corda CE eguale B e dal punto E si abbassi EF perpendicolare a CD . Le rette CD , CF avranno la stessa ragione dei due quadrati.

Difatto se si tirano EO , ED , è prima di tutto chiaro che essendo $EO = OC = OD$ come raggi della circonferenza, l'angolo CED è retto. Ciò posto noi sappiamo che in un triangolo rettangolo CED abbassata dal vertice dell'angolo retto la perpendicolare sull'ipotenusa, si ha:

$$\overline{CD}^2 : \overline{CE}^2 :: CD : CF,$$

e ponendo A al posto di CD , B a quello di CE :

$$\overline{A}^2 : \overline{B}^2 :: CD : CF,$$

lo che prova l'esattezza della costruzione effettuata.

2.° Si convertono i poligoni in quadrati equivalenti e quindi si opera come fu fatto di sopra.

Problema.

Fare un quadrato equivalente alla somma o alla differenza di due quadrati dati.

1.° Sieno A e B (*fig. 98*) i lati dei quadrati dati. Costruito un angolo retto DOC si prendano sui suoi lati a partire dal vertice O le lunghezze $OE = A$, $OF = B$ e si tiri quindi EF che sarà il lato del quadrato cercato.

Si ha difatto, per un cognito teorema, nel triangolo rettangolo EOF che:

$$\overline{EF}^2 = \overline{EO}^2 + \overline{OF}^2 = A^2 + B^2.$$

2.° Sieno A e B (*fig. 99*) i lati dei dati quadrati. Fatto un angolo retto COD si prenda sopra uno dei suoi lati la lunghezza OE eguale al più piccolo dei lati dati B . Indi con centro in E e raggio eguale ad A si determini il punto F della OD . OF sarà il lato del quadrato richiesto.

Difatto nel triangolo rettangolo OEF , si ha che:

$$\overline{EF}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2,$$

donde:
$$\overline{OF}^2 = \overline{EF}^2 - \overline{OE}^2 = A^2 - B^2.$$

Problema.

Esprimere l'area di un triangolo in funzione dei suoi tre lati (fig. 100).

Si indichino algebricamente i tre lati del triangolo ABC con le lettere a, b, c , degli angoli opposti. In un triangolo qualunque dovendo esistere due angoli acuti almeno sia C uno di essi. Considerando il quadrato del lato opposto a questo angolo, per un cognito teorema, avremo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times OC,$$

donde:
$$2a \times OC = a^2 + b^2 - c^2$$

e
$$OC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Si indichi con h la perpendicolare OA abbassata dal vertice A sul lato BC . Nel triangolo rettangolo AOC , si ha:

$$h^2 = b^2 - \overline{OC}^2 = (b + OC)(b - OC)$$

e sostituendo ad OC il trovato valore:

$$h^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

e riducendo al medesimo denominatore nei due fattori:

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2},$$

espressione che può anche scriversi:

$$h^2 = \left(\frac{(a+b)^2 - c^2}{4a^2} (c^2 - (a-b)^2)\right)$$

ricordando poscia che la differenza di due quadrati è decomponibile nel prodotto della somma per la differenza delle radici, si ottiene:

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)}{4a^2}$$

e
$$h = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)}{4a^2}}.$$

Ora l'area del triangolo è $\frac{a \times h}{2}$ e perciò sostituendo ad h il suo valore e riducendo, risulta:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)}.$$

Si può dare a questa espressione dell'area di un triangolo una forma più semplice introducendovi il perimetro del triangolo stesso. Chiamatolo difatto $2p$ sarà $a+b+c=2p$, donde si deduce:

$$\begin{aligned} a+b-c &= 2(p-c), \\ a+c-b &= 2(p-b), \\ b+c-a &= 2(p-a), \end{aligned}$$

dunque sostituendo e riducendo:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ESEMPIO. Se si avesse:

$$a = 1^m, 20, \quad b = 1^m, 80, \quad c = 2^m, 15,$$

si troverà: $2p = 5, 15$ e $p = 2, 575$,

$$p-a = 1, 375,$$

$$p-b = 0, 775,$$

$$p-c = 0, 425,$$

e quindi:

$$S = \sqrt{2, 575 \times 1, 375 \times 0, 775 \times 0, 425}$$

e fatti i calcoli:

$$S = 1^m, 08 \text{ meno di un decimetro quadrato.}$$

COROLLARIO. *Se il triangolo è equilatero:*

$$b = c = a, 2p = 3a \text{ e } p = \frac{3a}{2}, p - a = \frac{a}{2} = p - b = p - c,$$

quindi:
$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

ESEMPIO. Supposto $a = 3^m$.

$$S = \frac{9}{4} \sqrt{3} = 3^m, 89 \text{ circa.}$$

§ 35.

Due triangoli che hanno un angolo eguale stanno fra loro come i prodotti dei lati che comprendono l'angolo eguale. Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Teorema.



Due triangoli che hanno un angolo eguale stanno fra loro come i prodotti dei lati che comprendono l'angolo eguale (fig. 101):

Sieno ABC , DEF i due triangoli che hanno l'angolo $B = E$. Condotte le altezze DL , AG dei medesimi dopo avere scelto a base uno dei lati che comprendono l'angolo eguale, avremo per le aree rispettive dei due triangoli:

$$S = \frac{BC \times AG}{2}, S' = \frac{EF \times DL}{2},$$

donde:
$$\frac{S}{S'} = \frac{BC \times AG}{EF \times DL}.$$

Ora i due triangoli rettangoli ABG , DEL che hanno gli angoli B ed E eguali per ipotesi, saranno equiangoli e perciò simili e i loro lati omologhi risulteranno in proporzione. Se dunque nell'eguaglianza trovata sopra si rimpiazza il rapporto $\frac{AG}{DL}$ coll'altro eguale $\frac{AB}{DE}$, si otterrà:

$$\frac{S}{S'} = \frac{BC \times AB}{DE \times EF},$$

il che prova il teorema enunciato.

Teorema.

Le aree di due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi (fig. 102).

Sieno ABC , DEF i triangoli dati. Essendo, per esempio, A e D due angoli omologhi, noi avremo pel precedente teorema:

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AB \times AC}{DE \times DF}.$$

Ora i triangoli essendo simili i loro lati omologhi son proporzionali e perciò:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF},$$

quindi:

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AB^2}{DE^2}.$$

§ 36.

Due poligoni simili si possono scomporre nello stesso numero di triangoli simili e similmente disposti. Due poligoni sono simili se sono composti di egual numero di triangoli simili e similmente disposti. In due poligoni simili i perimetri stanno fra loro come le linee omologhe e le aree come i quadrati delle medesime.

Teorema.

Due poligoni simili si possono scomporre nello stesso numero di triangoli simili e similmente disposti. Viceversa due poligoni composti di egual numero di triangoli simili e similmente disposti son simili (fig. 103).

1.° Sieno $ABCDE$, $FGHIL$ i poligoni; dai vertici omologhi E , L , si tirino le diagonali omologhe EB , LG , EC , LH che gli decompongono in triangoli similmente disposti e che si vuol provare esser simili due a due.

I triangoli EAB , FLG hanno gli angoli eguali A e F compresi fra lati proporzionali, lo che risulta dalla similitudine dei due poligoni. Detti triangoli son dunque simili.

I triangoli EBC , LGH hanno l'angolo $EBC = LGH$, giacchè il primo è la differenza fra ABC ed EBA , ed ABC

eguaglia FGH , come EBA eguaglia LGF , essendo i primi due omologhi nei dati poligoni e i secondi nei triangoli simili EAB e FLG , per cui:

$$EBC = FGH - FGL = LGH.$$

Di più il rapporto di EB a LG eguaglia quello di AB ad FG per la similitudine dei triangoli ABE , FLG e quest'ultimo rapporto a sua volta eguaglia quello di BC a GH per la similitudine dei poligoni. E perciò i triangoli EBC , LGH hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali e per conseguenza son simili.

Si dimostrerebbe in modo analogo la similitudine due a due dei triangoli nei quali possono scomporsi i due poligoni.

2.° Siano $ABCDE$, $FGHIL$ i poligoni composti dei triangoli simili e similmente disposti ABE ed FLG , EBC ed LGH , ECD ed LHI .

Gli angoli dei due poligoni sono eguali sia per essere angoli omologhi di triangoli simili, sia per esser formati di angoli eguali. Della prima specie sono, per esempio, A ed F ; della seconda B e G composti il primo di ABE ed EBC rispettivamente eguali ad $FG L$ ed LGH parti del secondo.

Di più il rapporto di similitudine dei triangoli ABE , $FG L$ è $\frac{BE}{LG}$ e perciò eguale a quello dei secondi triangoli ECB , LGH . Dunque ne viene che i lati omologhi AB , FG , BC , GH dei poligoni sono in proporzione.

Si proverebbe in simil guisa che questi lati son proporzionali agli altri successivi mediante l'ispezione degli altri triangoli che formano i poligoni. E perciò questi ultimi avendo angoli eguali e lati omologhi proporzionali saranno simili, come volevasi dimostrare.

Teorema.

I perimetri di due poligoni simili son proporzionali ai lati omologhi (fig. 104).

1.° Sieno $ABCDE$, $FGHIL$ i due poligoni simili. Dall'eguaglianza dei rapporti eguali:

$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{CD}{HI} = \frac{DE}{IL} = \frac{EA}{LF},$$

si deduce per un noto teorema aritmetico che:

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{FG + GH + HI + IL + LF} = \frac{AB}{FG}.$$

2.° Si decompongano i due poligoni simili nello stesso numero di triangoli simili mediante diagonali omologhe. I triangoli ABC , FGH essendo simili per un noto teorema, noi avremo:

$$\frac{ABC}{FGH} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{FH}^2}$$

Per una simil ragione:

$$\frac{ACD}{FHI} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{FH}^2},$$

donde:

$$\frac{ABC}{FGH} = \frac{ACD}{FHI},$$

vale a dire che i triangoli simili in cui si son decomposti i poligoni sono di aree proporzionali. Quindi dalle eguaglianze:

$$\frac{ABC}{FGH} = \frac{ACD}{FHI} = \frac{ADE}{FIL},$$

si deduce che:

$$\frac{ABC + ACD + ADE}{FGH + FHI + FIL} = \frac{ABC}{FGH},$$

ossia:

$$\frac{ABCDE}{FGHIL} = \frac{ABC}{FGH}.$$

Dunque le aree dei poligoni son proporzionali a quelle di due triangoli simili nei quali furon decomposti. Ora siccome:

$$\frac{ABC}{FGH} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{FG}^2},$$

anche:

$$\frac{ABCDE}{FGHIL} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{FG}^2}.$$

SOLIO. Crescendo adunque i lati dei poligoni come i numeri 1, 2, 3, 4, ec., le aree loro cresceranno come 1, 4, 9, 16, ec.

§ 37.

Sopra una data retta costruire un poligono simile ad un poligono dato. Costrurre un poligono simile ad un poligono dato e che abbia con questo una data ragione. Dividere un triangolo in parti proporzionali a' numeri dati mediante rette parallele ad un lato.

Problema.

Sopra una retta data costruire un poligono simile ad un poligono dato.

Sia $ABCDE$ il poligono (*fig. 105*) e FG la retta data che si suppone, per esempio, dovere essere l'omologa di AB . Al punto G si faccia l'angolo $FGO = B$ e sulla retta così determinata, si prenda GH eguale alla quarta proporzionale dopo AB, BC, FG ; indi al punto H si faccia l'angolo $GHI = C$ e sulla retta HM si prenda HI , eguale alla 4.^a proporzionale fra BC, CD, HG . Si prosegua con analoghe costruzioni e si verrà a determinare un poligono cogli angoli eguali ed i lati omologhi proporzionali a quelli di $ABCDE$ e che perciò gli sarà simile.

Problema.

Costrurre un poligono simile ad un poligono dato e che abbia con questo una data ragione.

Sia A un lato qualunque del poligono dato, X l'omologo nel poligono incognito e $\frac{m}{n}$ la data ragione. I poligoni simili dovendo stare fra loro come i quadrati dei lati omologhi dovremo avere la relazione:

$$\frac{A^2}{X^2} = \frac{m}{n},$$

ossia:

$$X^2 = \frac{nA^2}{m},$$

eguaglianza che può tradursi nella proporzione:

$$\frac{nA}{m} : X :: X : A,$$

ond'è che la determinazione del lato X si riduce alla ricerca di una media proporzionale. Conosciuto questo lato il problema rientra nel precedente.

Problema.

Dividere un triangolo in parti proporzionali a numeri dati mediante rette parallele ad un lato (fig. 106).

Sia, per esempio, il triangolo ABC da dividersi in parti proporzionali ai numeri 2, 3 e 5 mediante rette parallele al lato BC . Secondo le indicazioni del problema la 1.^a parte dovendo rappresentarsi col n.° 2, la seconda con 3, la terza con 5, il triangolo totale ABC corrisponderà a $2 + 3 + 5 = 10$. Il rapporto adunque della 1.^a parte triangolare ADE ad ABC deve essere $2 : 10$. Se dunque si indica con X la distanza incognita AD per le proprietà dei triangoli simili, avremo:

$$ABC : ADE :: \overline{AB}^2 : X^2 :: 10 : 2,$$

donde:
$$X^2 = \frac{2 \overline{AB}^2}{10},$$

il che porta all'altra proporzione:

$$\frac{2}{10} AB : X :: X : AB.$$

Si vede adunque che la determinazione del punto D e per conseguenza del triangolo ADE dipende dalla ricerca di una media proporzionale.

Eguualmente se la seconda parte $DEFG$ ha per superficie 3, il triangolo AFG avrà invece un'area $3 + 2 = 5$ e perciò indicando con y la lunghezza AF , avremo analogamente:

$$ABC : AFG :: \overline{AB}^2 : \overline{AF}^2 :: 10 : 5,$$

donde:
$$\overline{AF}^2 = y^2 = \frac{5 \overline{AB}^2}{10},$$

il che conduce alla proporzione:

$$\frac{5}{10} AB : y :: y : AB.$$

La ricerca di una seconda media proporzionale porta a determinare il punto F . E così si procederà qualunque fosse il numero delle parti in cui deve essere decomposto il triangolo ABC .

§ 38.

Definizioni.

Le definizioni più importanti relative alla circonferenza ed al circolo vennero già date al tema 1.º Da queste si deducono però alcuni teoremi preliminari assai importanti perchè servono a dimostrare altre proprietà della curva e della combinazione delle linee rette colla medesima.

Teorema.

Una retta non può incontrare la circonferenza in più di due punti (fig. 107).

Supposto difatto che una retta qualunque incontrasse la circonferenza in tre punti A, B, C , unito il centro O coi medesimi, ed abbassata la perpendicolare OD sulla retta ABC , si avrebbero tre oblique eguali OA, OB, OC come raggi, e perciò egualmente distanti dal piede della perpendicolare. Ciò essendo assurdo, sarà egualmente assurda l'ipotesi da cui partimmo.

Teorema.

Ogni punto interno alla circonferenza dista dal centro meno del raggio e ogni punto esterno ne dista più.

Queste verità sono evidenti, nè hanno bisogno di dimostrazione.

Teorema.

Ogni diametro divide circonferenza e circolo in due parti eguali (fig. 108).

Sia AD il diametro. Si sovrappongano le due parti ABD , AED facendo ruotare la prima attorno al diametro AD ;



l'arco ABD verrà a coincidere coll'arco AED perchè i loro punti sono egualmente distanti dal centro.

SOLIO. Si chiamano *semi-circonferenze* o *semi-circoli* le due parti eguali in cui un diametro divide la circonferenza o il circolo. È poi evidente che due diametri perpendicolari divideranno la circonferenza in quattro parti eguali che diconsi *quadranti*.

Teorema.

Ogni corda è minore del diametro. (Fig. 108)

Sia AB la corda, e AD il diametro che passa per una delle sue estremità. Tirato il raggio OB avremo nel triangolo AOB che:

$$AB < AO + OB,$$

ed essendo:

$$OB = OD,$$

$$AB < AO + OD,$$

ossia:

$$AB < AD,$$

come volevasi provare.



§ 39.

Nello stesso circolo od in circoli eguali: 1.° Gli angoli al centro eguali corrispondono ad archi eguali e viceversa; 2.° Le corde che sottendono archi eguali sono eguali e viceversa; 3.° Di due corde che sottendono archi disuguali, purchè minori di una mezza circonferenza, la maggiore è quella che sottende un arco maggiore e viceversa.

Teorema.

In un medesimo circolo od in circoli eguali gli angoli al centro eguali corrispondono ad archi eguali e viceversa (fig. 109).

1.° Sieno nei due circoli eguali C e C' gli angoli al centro eguali ACB , $MC'N$. Portato il secondo sul primo per modo che MC' coincida con AC attesa l'eguaglianza degli angoli $MC'N$, ACB il lato $C'N$ prenderà la direzione CB e per essere $C'N = CB$ il punto N cadrà in B e i due archi

AB , MN appartenendo a circoli eguali, e coincidendo nei loro estremi, saranno eguali.

2.° Sia arco $AB =$ arco MN . Portisi l'un circolo sull'altro per modo che coincidano e corrispondano pure gli estremi degli archi eguali. AC avrà due punti a comune con $C'M$ e BC con NC' . Per conseguenza i due angoli ACB , $MC'N$ si sovrapporranno esattamente e saranno perciò eguali.

Teorema.

In un medesimo circolo o in circoli eguali:

1.° *Gli archi eguali sono sottesi da corde eguali e viceversa;*

2.° *Fra due corde che sottendono archi eguali, purchè minori della mezza circonferenza, la maggiore è quella che sottende un arco maggiore (fig. 110).*

1.° Se nei circoli eguali C , C' l'arco AB eguaglia l'arco MN sovrapponendo i due circoli come nel teorema precedente, cioè per modo che gli archi eguali coincidano, la corda AB cadrà sopra MN .

Viceversa sia la corda $AB = MN$. I triangoli ABC , MNC' saranno eguali per avere i tre lati eguali e quindi l'angolo al centro ACB eguaglierà $MC'N$. Perciò per la prima parte del teorema precedente l'arco $AB = MN$.

2.° Sia nel circolo C' l'arco $DSE > MN$. Prendasi del primo arco una porzione DGS eguale al secondo e si tiri la corda DS . Avremo di necessità che l'angolo $DC'S$ sarà minore di $DC'E$, e perciò considerati i due triangoli $DC'E$, $DC'S$ che hanno due lati eguali e l'angolo compreso disuguale ne risulterà di necessità dover essere il terzo lato $DE > DS$ come volevasi dimostrare, giacchè pel n.° 1, $DS = MN$. Viceversa sia $DE > MN$. Non potrà allora essere l'arco $DSE =$ arco MN perchè si avrebbe $DE = MN$ e neppure arco $DSE <$ arco MN , giacchè in quel caso per l'antecedente proposizione sarebbe $DE < MN$, mentre è invece il contrario.

Occorre dunque necessariamente che si abbia:

$$\text{arco } DSE > \text{arco } MN.$$

§ 40.

Il raggio perpendicolare ad una corda divide per mezzo la corda e l'arco sotteso e viceversa. Gli archi compresi fra due corde parallele sono eguali. Se due circonferenze si tagliano, la retta che passa pei loro centri è perpendicolare sul mezzo della corda comune. Due corde eguali sono egualmente distanti dal centro; di due corde disuguali la minore è più distante dal centro e viceversa.

Teorema.

Il raggio perpendicolare ad una corda divide per mezzo la corda e l'arco sotteso e viceversa (fig. 111).

Sia AB la corda data che sottende l'arco AMB , CO il raggio ad essa perpendicolare. Dall'essere eguali le oblique CA , CB raggi del circolo ne risulta prima di tutto $AO = BO$. Nel triangolo isoscele ABC , la CO è bisettrice dell'angolo ACB , perciò $ACO = BCO$ e quindi siccome questi due angoli sono angoli al centro, gli archi che loro corrispondono AM , BM saranno eguali.

Viceversa se $AO = BO$, oppure arco $AM = BM$ i due triangoli AOC , BOC saranno eguali per avere o i tre lati, oppure due lati e l'angolo compreso eguale. Quindi CO è perpendicolare ad AB .

Teorema.

Gli archi compresi fra due corde parallele sono eguali (fig. 111).

Siano AB , LS le due corde. Condotta il raggio CM perpendicolare ad amendue, avremo pel teorema precedente:

$$\begin{aligned} \text{arco } LM &= \text{arco } SM, \\ \text{arco } AM &= \text{arco } BM, \end{aligned}$$

e sottraendo membro a membro:

$$\text{arco } LA = \text{arco } BS.$$

Teorema.

Se due circonferenze si tagliano la retta che passa pei loro centri è perpendicolare sul mezzo della corda comune (fig. 112).

I punti C, C' essendo egualmente distanti da S e S' la retta CC' è perpendicolare sul mezzo di SS' .

Teorema.

Due corde eguali sono egualmente distanti dal centro e viceversa. Di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro e viceversa (fig. 113).

1.° Siano AB, CD due corde eguali. Condotti i raggi OT, OM ad esse perpendicolari sul loro mezzo rispettivo S, L , avremo formato due triangoli rettangoli ASO, COL che saranno eguali per avere le ipotenuse eguali e il cateto $AS = CL$ come metà di rette egualmente lunghe. Perciò sarà $OS = OL$, come volevasi provare.

Viceversa se $OL = OS$, i triangoli rettangoli ASO, COL saranno eguali ed avremo $AS = CL$, ossia $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$ e quindi $AB = CD$.

2.° Sia la corda $AB > CN$ e perciò l'arco $ATB >$ arco CN . Presa la porzione $ATV = CN$ sarà corda $AV =$ corda CN . Ora il raggio OG perpendicolare sopra AV incontrando necessariamente la AB in un punto intermedio fra A e S si avrà $OE < OG$. Ma nel triangolo rettangolo OES è pure $OS < OE$: dunque a maggior ragione ne risulterà $OS < OG$.

Viceversa se $OS < OG$ non potrà essere $AV = AB$, perchè altrimenti sarebbe $OS = OG$. Neppure potrà verificarsi che $AV > AB$, giacchè in tal caso per la dimostrazione di sopra ne verrebbe di conseguenza $OG < OS$ e ciò non è.

Escluse queste due possibilità è solo ammissibile la terza ipotesi, che cioè venga:

$$AB > AV.$$

§ 41.

Dividere un arco di circolo in due parti eguali. Trovare il centro di un circolo o di un arco di circolo dato. Far passare una circonferenza di circolo per tre punti dati.

Problema.

Dividere un arco di circolo in due parti eguali (fig. 114).

Sia APB l'arco dato. Si elevi la perpendicolare sulla metà della corda AB coi metodi cognitivi. Essa dividerà per metà in P anche l'arco sotteso. Ciò risulta da un teorema dimostrato.

Problema.

Trovare il centro di un circolo o di un arco dato (fig. 115).

Sia A, M, B l'arco dato. Presi tre punti a piacere sul medesimo AMB si tirino le corde AM, MB . Se il centro O dell'arco fosse cognito unendolo colle metà C, D , delle due corde, le rette OC, OD risulterebbero rispettivamente perpendicolari ad AM, MB . Dunque viceversa elevando le perpendicolari sul mezzo delle due corde, queste si incontreranno in un punto O che sarà il centro del circolo o dell'arco.

Problema.

Far passare una circonferenza per tre punti dati (fig. 116).

Sieno A, B, C , i tre punti dati. Questo problema rientra evidentemente in quello che precede. Tirate difatto AB, BC , ed elevate LM, NP , perpendicolari sul mezzo rispettivo delle medesime, il punto O in cui si incontrano sarà il centro della circonferenza. $OA = OB = OC$ ne sarà il raggio.

SOLIO. Il problema non è possibile allorchè i tre punti dati sono in linea retta, giacchè in questo caso le due

perpendicolari tracciate resultano parallele. Ciò doveva essere, giacchè è cognito che una retta non può incontrare la circonferenza in più di due punti.

§ 42.

In un circolo la retta perpendicolare all'estremità di un raggio è tangente al circolo e viceversa. Quindi gli archi compresi fra una tangente ed una corda parallele sono eguali. Se due circonferenze di circolo son tangenti l'una all'altra interiormente od esternamente, il loro centro ed il punto di contatto sono posti sopra una medesima retta perpendicolare alla loro tangente comune condotta pel punto di contatto.

Teorema.

In un circolo la retta perpendicolare all'estremità di un raggio è tangente alla circonferenza e viceversa (fig. 117).

Sia ST perpendicolare all'estremo A del raggio OA . Ogni altra retta OM che vada dal centro O ad ST sarà obliqua e perciò più lunga di OA , ond'è che il punto M dovrà di necessità trovarsi fuori del circolo. E così la ST non avendo che un solo punto A di comune colla circonferenza le sarà tangente.

Viceversa abbiasi la tangente ST in A . Preso un punto qualunque M della medesima ed unitolo col centro O ne verrà $OM > OA$, e perciò la retta OA sarà la più corta fra tutte quelle che vanno dal punto O alla ST . Dunque le sarà perpendicolare.

COROLLARIO. *Gli archi compresi fra una tangente e una corda parallele sono eguali.*

Sia la corda BC parallela alla tangente ST . Il raggio OA perpendicolare ad amendue dividerà per un cognito teorema l'arco BAC per metà e quindi avremo:

$$\text{arco } BA = \text{arco } AC.$$

Due circonferenze son tangenti fra loro quando avendo un sol punto a comune, hanno nel medesimo la tangente comune. Esse possono essere tangenti esternamente e internamente.

Teorema.

Allorchè due circonferenze son tangenti, la linea che unisce i loro centri è perpendicolare alla tangente comune nel punto di contatto (fig. 118).

Sieno le circonferenze C , C' tangenti esternamente in A , ed ST sia la loro tangente comune. Per un teorema già cognito tanto CA che $C'A$ dovranno esser perpendicolari ad ST e quindi queste due rette saranno l'una in prolungamento dell'altra.

§ 43.

Due angoli qualunque stanno fra loro come gli archi compresi fra i loro lati e descritti dai loro vertici come centri con raggi eguali. Come si misurano gli angoli. Unità di misura degli angoli e degli archi di circolo. Divisione sessagesimale e centesimale della circonferenza del circolo.

Teorema.

In circoli eguali gli angoli al centro sono proporzionali agli archi intercetti fra i loro lati (fig. 119).

Sieno ABC , DEF due angoli al centro e AC , DF gli archi intercetti fra i loro lati. Suppongasi dapprima che fra questi archi esista una comune misura che entri, per esempio, tre volte in AC e cinque in DF . Conducansi dai punti di divisione ai vertici le rette Ba , Bb , Ec , Ed , Ee , ec.; avremo diviso il primo angolo in tre angoli eguali ed il secondo in cinque pure eguali fra loro ed ai primi, e perciò sarà:

$$ABC : DEF :: 3 : 5.$$

Ma anche: $AC : DF :: 3 : 5,$

quindi: $ABC : DEF :: AC : DF.$

Quando i due archi fossero stati incommensurabili, un ragionamento identico a quello fatto pei due rettangoli al tema 23, condurrebbe alla dimostrazione dell'enunciata verità.

SOLIO 1.° Se nella proporzione sopra stabilita si fa al tempo stesso $DEF = 1$, $DF = 1$, vale a dire se si sceglie per unità di misura degli angoli quello che comprende fra i suoi lati l'arco unità di misura si ottiene $ABC = AC$.

Questa eguaglianza va intesa naturalmente in un senso relativo e non assoluto, e vuol significare che tanto l'angolo come l'arco crescono e diminuiscono colle stesse leggi, e che espressi in numeri hanno lo stesso valore, solo variando la specie delle unità alle quali le due quantità son riferite.

A formarsi un'idea chiara della grandezza degli angoli basta riferirli agli archi intercetti fra i loro lati, e descritti dai vertici come centri con raggio eguale.

SOLIO 2.° Si prende ordinariamente il quadrante per unità di misura degli archi, l'angolo retto è allora l'unità degli angoli.

Per esprimere più comodamente gli archi in numeri si è diviso il quadrante in novanta parti eguali chiamate *gradi*, e perciò la circonferenza ne contiene 360. Ogni grado si divide in 60 minuti primi, ed ogni primo in 60 secondi. I gradi si indicano col segno ° posto in alto e a destra del numero, i minuti con un apice, ed i secondi con due apici. E così si scriverà, ad esempio, $22^\circ, 17', 54''$. Questa divisione della circonferenza dicesi *sessagesimale*.

Per valutare il rapporto di un arco qualunque al quadrante, o ciò che è lo stesso di un angolo all'angolo retto, si divide il numero di secondi contenuti nell'arco per il numero di secondi di cui è composto il quadrante, cioè per $90 \times 60 \times 60$, ossia 324000.

ESEMPIO. Sia l'angolo di $20^\circ, 12', 30''$. Ridottolo in secondi siccome esso è rappresentato da 72750 secondi, il suo rapporto all'angolo retto verrà dato dalla frazione:

$$\frac{72750}{324000} = \frac{2425}{10800} = \frac{97}{432}.$$

Allorquando in Francia sul cadere dello scorso secolo venne introdotto il sistema metrico, si scelse per analogia una divisione decimale della circonferenza che venne allora

a comprendere 400 gradi divisi ognuno in 100 minuti primi ed ogni primo in 100 secondi. Ma questo sistema non si generalizzò ed è anzi in oggi caduto completamente in disuso.

Ogni grado centigrado vale $i \frac{9}{10}$ del grado sessagesimale. E perciò la riduzione dall'un sistema nell'altro si farà a seconda dei due casi moltiplicando per $\frac{9}{10}$, ovvero per $\frac{10}{9}$.

ESEMPIO. Siano $15^\circ, 10'$ sessagesimali da ridursi in centesimali. Si ha:

$$15^\circ, 10' = 15 \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Moltiplicando per $\frac{10}{9}$, si ottiene $\frac{910}{54}$, ossia gradi decimali:

$$16 \frac{46}{54} = 16^\circ, 85', 18'' \text{ circa.}$$

Viceversa sieno $15^\circ, 10'$ centesimali da ridursi in sessagesimali. Moltiplicando per $\frac{9}{10}$, avremo siccome:

$$15^\circ, 10'' = 15 \frac{1}{10} = \frac{151}{10}, \frac{151}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{1359}{100},$$

ossia: $13 \frac{59}{100} = \text{gradi } 13^\circ, 35', 24''.$

Da ciò che abbiám detto ne consegue che nel sistema centesimale l'angolo retto corrisponde a 100° , e perciò sarà facile il trovare il rapporto di un angolo qualunque coll'angolo retto.

§ 44.

Ogni angolo inscritto in un circolo ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati. L'angolo fatto da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati. L'angolo il cui vertice è posto fra il centro e la circonferenza di un circolo ha per misura la semi-somma degli archi compresi, l'uno fra i suoi lati, l'altro fra i loro prolungamenti. L'angolo il cui vertice è posto fuori della circonferenza di un circolo ha per misura la semi-differenza dei due archi compresi fra i suoi lati.

Teorema.

Ogni angolo inscritto in un circolo ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati (fig. 120).

Possono darsi tre casi, cioè: 1.° il centro del circolo è dentro l'angolo; 2.° è posto sopra uno dei lati; 3.° sta al di fuori dell'angolo.

1.° Sia BAC l'angolo dato. Uniscasi il suo vertice A col centro O del circolo e si prolunghi AO fino ad incontrare la circonferenza in D , quindi si tirino BO , OC . Gli angoli BOD , COD essendo rispettivamente esterni ai triangoli AOB , AOC , avremo:

$$BOD = BAO + ABO,$$

$$COD = CAO + ACO,$$

e sommando membro a membro:

$$BOC = BAC + ABO + ACO.$$

Ma i triangoli OAB , OAC essendo isosceli deve essere:

$$ABO = BAO, ACO = CAO,$$

e quindi: $ABO + ACO = BAC$,

per cui ne risulta:

$$BOC = 2BAC \text{ e } BAC = \frac{1}{2} BOC.$$

Ond'è che la misura di BAC angolo inscritto sarà la metà di quella di BOC angolo al centro e verrà perciò data dalla metà dell'arco BC .

2.° Sia BAD l'angolo dato. Tirata OB l'angolo BOD essendo esterno al triangolo OAB , avremo:

$$BOD = ABO + BAO.$$

Ma il triangolo ABO essendo isoscele, si ha $ABO = BAO$ e quindi:

$$BOD = 2BAO \text{ e } BAO = \frac{1}{2} BOD.$$

3.° Sia FAB l'angolo dato. Tirato al solito il diametro AD , si ha:

$$FAB = FAD - BAD.$$

Ma per il numero 2 la misura di FAD è $\frac{1}{2} FD$ e quella di BAD , $\frac{1}{2} BD$. E perciò l'angolo FAB sarà misurato da:

$$\frac{1}{2} FD - \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} FB.$$

COROLLARIO. *Gli angoli inscritti nello stesso segmento di circolo sono eguali.*

Difatto essi son tutti misurati dallo stesso arco di circolo. Quelli inscritti nella mezza circonferenza avendo per misura il quadrante saranno retti; quelli inscritti nei segmenti minori del semi-circolo risulteranno ottusi, e quelli nei segmenti maggiori verranno invece ad essere acuti.

In generale poi si dice che un dato segmento è capace di un dato angolo, quando gli angoli inscritti nel segmento sono eguali all'angolo dato.

Teorema.

L'angolo formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati (fig. 121).

Sia BAC l'angolo dato. Tirata pel punto C la retta CD parallela alla tangente AB avremo che l'angolo $BAC = ACD$ come alterni-interni. Per un altro teorema arco $AC =$ arco AD . Ma l'angolo inscritto ACD è misurato dalla metà dell'arco $AD - AC$, dunque il suo eguale BAC può pure misurarsi per la metà dell'arco AC intercetto fra i suoi lati.

Teorema.

L'angolo di due corde ha per misura la semi-somma degli archi compresi fra i suoi lati (fig. 122).

Sieno AB, CD le corde date intersecantisi in M . Tirata AD l'angolo CMA risulterà esterno al triangolo ADM , e quindi avremo:

$$CMA = ADM + MAD.$$

Ma tanto ADM che MAD sono angoli inscritti e le loro misure rispettive son date da $\frac{1}{2}$ arco AC e $\frac{1}{2}$ arco BD ; quindi la misura di CMA sarà $\frac{1}{2}$ [arco $CA +$ arco BD] come volevasi provare.

Teorema.

L'angolo il cui vertice è posto fuori della circonferenza di un circolo ha per misura la semi-differenza degli archi compresi fra i suoi lati (fig. 123).

Sia ABC l'angolo formato dalle due secanti BA , BC . Si tiri la corda DC . L'angolo ADC è esterno al triangolo ADC , perciò:

$$ADC = ABC + BCD,$$

donde: $ABC = ADC - BCD.$

Ora questi due ultimi angoli sono inscritti nel circolo e perciò misurati rispettivamente dalle metà degli archi AC , DE , quindi l'angolo ABC ha per misura la metà della differenza di questi stessi archi compresi fra i suoi lati.

SCOLIO. Si dimostra in modo identico il teorema quando uno dei lati è secante e l'altro tangente, ovvero tutti e due son tangenti.

§ 45.

Per un punto dato sulla circonferenza di un circolo o fuori di questa circonferenza, condurre una tangente alla circonferenza medesima. Condurre una tangente comune a due circoli dati. Sopra una data retta descrivere un segmento di circolo capace di un angolo dato.

Problema.

Per un punto dato condurre una tangente alla circonferenza (fig. 124).

1.° Il punto dato è in A sulla circonferenza. Condotta il raggio OA , si elevi BC perpendicolare al medesimo. Dessa sarà la tangente richiesta. Ciò risulta da un cognito teorema.

2.° Il punto dato è in E fuori della circonferenza. Tirata OE , sulla medesima considerata qual diametro, si descriva una nuova circonferenza che taglierà in S e T quella data. Condotte allora ES , ET saranno queste due tangenti richieste. Difatto la curva OTE essendo semi-circonferenza



fra la intiera retta e l'altra parte. Ciò posto sia AB la retta data. Innalzata all'estremità B la perpendicolare $BO = \frac{1}{2} AB$, si faccia centro in O e con raggio BO si descriva una circonferenza. Tirata quindi la secante AO e riportata la sua parte esterna da D in C , avremo completamente risoluto il problema. Difatto la tangente AB essendo media proporzionale fra la secante AE e la sua parte esterna AD , noi avremo:

$$AE : AB :: AB : AD,$$

e componendo per sottrazione:

$$AE - AB : AB - AD :: AB : AD,$$

ed osservando che:

$$AE - AB = AE - DE = AD = AC,$$

$$AB - AD = AB - AC = BC,$$

$$AD = AC,$$

questa proporzione diviene:

$$AC : BC :: AB : AC,$$

in cui cambiando i medii cogli estremi resulta:

$$AB : AC :: AC : BC,$$

lo che prova che la retta AB fu divisa realmente in C in media ed estrema ragione.

SOLIO. Detta a la retta data, x il maggior segmento, y il minore, dovremo avere:

$$a : x :: x : a - x,$$

onde:

$$a^2 - ax = x^2$$

equazione che risolta dà:

$$x = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} a^2} = -\frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2} a \sqrt{5}.$$

Adottando il solo segno $+$ come quello che corrisponde al problema, si ha:

$$x = \frac{a}{2} [\sqrt{5} - 1],$$

indi:
$$y = a - x = a - \frac{a}{2} [\sqrt{5} - 1] =$$

$$a - \frac{a}{2} \sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} [3 - \sqrt{5}].$$

ESEMPIO. Supposto che la retta data avesse la lunghezza di 4^m, otterremo:

$$x = 2 [\sqrt{5} - 1], y = 2 [3 - \sqrt{5}],$$

e fatti i calcoli per approssimazione:

$$x = 2,46, y = 1,54.$$

§ 48.

Inscrivere un circolo in un dato triangolo e trovare il raggio in funzione dei lati del triangolo. Circoscrivere un circolo ad un dato triangolo e trovare il raggio in funzione dei lati del triangolo.

Teorema.

La bisettrice di un angolo ha tutti i suoi punti egualmente distanti dai lati dell'angolo.

Ogni punto al di fuori della bisettrice, ma situato entro l'angolo è disugualmente distante dai suoi lati (fig. 131).

1.° Sia D un punto qualunque della bisettrice BD dell'angolo ABC e siano DF , DE le perpendicolari abbassate dal punto D sui due lati dell'angolo. I triangoli rettangoli BDE , BDF che hanno l'ipotenusa BD comune e l'angolo acuto $EBD = DBF$ saranno eguali, quindi $DE = DF$.

2.° Sia G un punto posto al di fuori della bisettrice e dentro l'angolo e siano GF , GL le perpendicolari abbassate dal punto G sui lati dell'angolo. Dal punto D in cui la GF taglia la bisettrice si conduca DE perpendicolare a BA ; pel teorema dimostrato al n.° 1, avremo $DE = DF$. Tirata quindi EG , si ha nel triangolo DGE che:

$$EG < GD + DE,$$

e ponendo DF al posto di DE :

$$EG < GF.$$

Ma la perpendicolare GL ad AB è più corta dell'obliqua EG , dunque a maggior ragione si ha $GL < GF$ e così il punto G è disugualmente distante dai lati AB e BC dell'angolo dato.

Teorema.

Le bisettrici dei tre angoli di un triangolo concorrono nel medesimo punto (fig. 132).

Sia ABC il triangolo dato e sia O il punto d'incontro delle bisettrici AO , BO degli angoli A e B . Questo punto come appartenente alla bisettrice AO sarà ad egual distanza dai lati AB , AC ; come situato invece sulla BO sarà equidistante dai lati AB e BC , e quindi risulta a sua volta ad ugual distanza da AC e da BC . Ora in forza delle due proposizioni del teorema precedente, perchè questa condizione sia soddisfatta occorre che il punto O si trovi sulla bisettrice dell'angolo C e perciò tirata OC , sarà questa la bisettrice del detto angolo. Così riman provato che le tre bisettrici concorrono al medesimo punto.

SCOLIO. Il punto O essendo egualmente distante dai tre lati AB , AC , BC del triangolo ABC , ne consegue che fatto centro nel medesimo e con un raggio eguale alla distanza comune da questi lati descritto un circolo, esso si troverà risultar tangente ai medesimi. Questo circolo dicesi *inscritto* nel triangolo.

Problema.

Inscrivere un circolo in un dato triangolo e trovarne il raggio in funzione dei lati del triangolo (fig. 133).

1.° Divisi per metà due angoli A e B del triangolo mediante le bisettrici AO , BO il loro punto di incontro sarà il centro del circolo inscritto e OD perpendicolare ad AB ne sarà il raggio. Ciò risulta chiaro dallo scolio del precedente teorema.

2.° Chiamato r il raggio $OD = OE = OF$ del circolo inscritto e detti a, b, c i tre lati del triangolo ed S la sua superficie, noi osserveremo che quelle parziali dei tre triangoli OAB, OAC, OBC saranno rispettivamente date da :

$$\frac{1}{2} cr, \quad \frac{1}{2} br, \quad \frac{1}{2} ar.$$

Ora l'area totale ABC eguaglia la somma delle tre parziali OAB, OAC, OBC e quindi si ha :

$$S = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr,$$

ossia: $2S = r(a + b + c),$

e $r = \frac{2S}{a+b+c}.$

Ora noi abbiain trovato altra volta dopo aver posto :

$$a + b + c = 2p,$$

che: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$

quindi: $r = \frac{2S}{2p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$

e facendo passare il denominatore sotto il radicale in definitiva :

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

ESEMPIO. Abbiassi:

$$a = 2^m, \quad b = 1^m, 5, \quad c = 1^m, 7,$$

sarà: $2p = 2 + 1, 5 + 1, 7 = 5, 2$ e $p = 2, 6,$

$$p - a = 2, 6 - 2 = 0, 6,$$

$$p - b = 2, 6 - 1, 5 = 1, 1,$$

$$p - c = 2, 6 - 1, 7 = 0, 9.$$

Quindi: $r = \sqrt{\frac{0,6 \times 1,1 \times 0,9}{2,6}},$

e fatti i calcoli: $r = 0^m, 47$ circa.

Problema.

Circoscrivere un circolo ad un dato triangolo (fig. 134).

Si dice che un circolo è circoscritto ad un poligono qualsiasi allorchè la sua circonferenza passa per tutti i vertici del poligono.

Da ciò ne consegue che la risoluzione del problema che ci occupa si riduce all'altro di far passare una circonferenza per tre punti dati A, B, C che in questo caso sono i vertici del triangolo. A quest'oggetto noi sappiamo che basta elevare due perpendicolari OD, OE sul mezzo dei lati AB, AC scelti a piacere. O è il centro del circolo circoscritto e $OA = OB = OC$ ne è il raggio.

Teorema.

Il rettangolo fatto sopra due lati qualunque di un triangolo è equivalente a quello costruito sul diametro del circolo circoscritto e sulla perpendicolare abbassata dal vertice opposto sul terzo lato (fig. 135).

Sia nel triangolo ABC , AE la perpendicolare condotta dal vertice A sul lato opposto BC e AD il diametro del circolo circoscritto che passa per A . I due triangoli ABD, AEC saranno simili per avere l'angolo $AEC = ABD$ come retti amendue, il primo per costruzione, il secondo come inscritto nel semi circolo e l'angolo $ACE = ADB$ perchè misurati dalla metà dello stesso arco AB . Potremo dunque stabilire la proporzione:

$$AB : AD :: AE : AC,$$

donde: $AB \times AC = AD \times AE,$

come si voleva dimostrare.

Problema.

Trovare il raggio del circolo circoscritto in funzione dei tre lati del triangolo.

Chiamati a, b, c i tre lati del triangolo ed R il raggio del circolo circoscritto che si tratta di determinare, noi

avremo pel teorema precedente che :

$$bc = 2R \times AE.$$

Ora se S è l'area del triangolo si ha :

$$S = \frac{a \times AE}{2},$$

donde :

$$AE = \frac{2S}{a},$$

quindi sostituendo questo valore nell'eguaglianza trovata sopra, ne viene :

$$bc = \frac{4RS}{a},$$

e perciò :

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Essendo infine cognito che :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

risulta :

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

ESEMPIO. Sia :

$$a = 2^m, b = 1^m, 5, c = 1^m, 7,$$

e perciò :

$$p = 2, 6, p - a = 0, 6, p - b = 1, 1 \text{ e } p - c = 0, 9.$$

Avremo :

$$R = \frac{2 \times 1,5 \times 1,7}{4\sqrt{2,6 \times 0,6 \times 1,1 \times 0,9}}.$$

e fatti i calcoli : $R = 1^m, 02$ circa.

COROLLARIO. *Se tanto nella formula che dà il raggio del circolo circoscritto, come in quella che dà il raggio del circolo inscritto, si fa $a = b = c$, vale a dire, si suppone il triangolo equilatero, si ottiene per questo caso speciale :*

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}, r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Moltiplicati insieme questi valori se ne deduce :

$$Rr = \frac{a^2}{6} \text{ e } 6Rr = a^2,$$

vale a dire che :

Nel triangolo equilatero il sestuplo rettangolo fatto sui raggi dei circoli inscritto e circoscritto eguaglia il quadrato del lato.

§ 49.

In un circolo dato inscrivere o circoscrivere un triangolo simile ad un triangolo dato. Descrivere un circolo che passi per due punti dati e tocchi una retta data. Descrivere un circolo che tocchi due rette date e passi per un punto dato.

Problema.

In un circolo dato inscrivere o circoscrivere un triangolo simile ad un triangolo dato (fig. 136).

1.° Sia ABC il triangolo dato ed O il circolo. Con centro nei vertici A e B e con raggio eguale ad OD si descrivano gli archi MN , PQ che misurano gli angoli A e B . A partire quindi da un punto qualunque D della circonferenza, si riporti il doppio degli archi MN e PQ da D in E ed F . Tirate DE , DF , EF , il triangolo DEF soddisfarà alle condizioni richieste. Difatto l'angolo $F = A$ come misurati ambedue dallo stesso arco $\frac{1}{2} DE = MN$ e per identica ragione $E = B$. Quindi i triangoli ABC , DEF sono equiangoli e per conseguenza simili.

2.° Sia O il circolo ed ABC il triangolo dato (fig. 137). Tirata una tangente qualunque DF alla circonferenza si facciano in punti scelti a piacere sulla medesima gli angoli $EDF = B$, $GFD = C$, quindi si abbassino OM , ON perpendicolari a FG e DE . Esse taglieranno la circonferenza in L e P . Per questi ultimi punti condotte le tangenti al circolo, che resulteranno necessariamente parallele a FG e DE , esse determineranno colla loro intersezione in V un triangolo VQR equiangolo e simile con ABC .

SOLIO. I due problemi ora risolti hanno un'infinità di soluzioni dipendenti ciascuna dalla scelta arbitraria del punto o della tangente da cui si parte.

Problema.

Descrivere un circolo che passi per due punti dati e tocchi una retta data (fig. 138).

Siano A e B i punti, CD la retta data. Si tiri AB e si prolunghi fino ad incontrare in O la retta CD . Si determini la media proporzionale fra OA ed OB e si riporti da O in F . Il circolo che passa per A , B ed F sarà quello richiesto. Difatti sappiamo non esservi che la tangente tirata da un punto esterno che goda della proprietà di esser media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna.

Quando la retta AB risultasse parallela a CD (fig. 139) la costruzione vien modificata nel modo seguente. Si divide per metà la AB in E e da quest'ultimo punto si conduce la perpendicolare comune alle due parallele AB e CD che andrà ad incontrare quest'ultima in F . Il circolo che passa per A , B ed F sarà quello richiesto. Difatto avendo il suo centro sulla EF , esso risulta tangente in F alla retta data CD .

Problema.

Descrivere un circolo che passi per un punto dato e tocchi due rette date (fig. 140).

Sieno AB , CD le rette ed E il punto dato. È prima di tutto evidente che il centro del circolo che si cerca deve trovarsi sulla bisettrice CG dell'angolo BCD che ne sarà perciò un diametro. Quindi condotta dal punto E la perpendicolare EG a CG e prolungatala di una lunghezza $GF = GE$, il punto F apparterrà anch'esso alla circonferenza, attesa la simmetria di questa curva attorno ogni diametro. Ciò posto il problema rientra in quello risoluto precedentemente.

Se il punto E fosse sulla bisettrice CG (fig. 141) tirata EF ad essa perpendicolare dovrà anche questa risultar tangente al circolo cercato che sarà perciò inscritto al triangolo BCF e che si costruirà quindi col metodo cognito.

§ 50.

Condizione perchè un quadrilatero sia inscrittibile in un circolo
o circoscrittibile al medesimo.

Teorema.

Gli angoli opposti di un quadrilatero inscritto nel circolo sono supplementarii e viceversa (fig. 142).

1.° Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto nel circolo O , l'angolo ABC ha per misura la metà dell'arco ADC compreso fra i suoi lati e l'angolo opposto ADC ha per misura la metà dell'arco ABC . La somma dei due angoli opposti ha dunque per misura la metà della somma dei due archi ADC, ABC , vale a dire la metà della circonferenza. Dunque i due angoli sono supplementarii.

2.° Viceversa sieno supplementarii gli angoli opposti del quadrilatero. Si faccia passare una circonferenza per i tre punti A, B, C , l'angolo inscritto ABC avrà per misura la metà dell'arco ADC compreso fra i suoi lati, per conseguenza il supplemento di ABC che è ADC deve aver per misura la metà dell'arco ABC il che esige che questo angolo sia inscritto nel segmento ADC . Dunque i quattro vertici del quadrilatero $ABCD$ trovansi sulla stessa circonferenza.

Teorema.

In un quadrilatero circoscritto la somma di due lati opposti eguaglia quella degli altri due, e viceversa (fig. 143).

1.° Sia $ABCD$ il quadrilatero circoscritto e sieno E, F, G, H , i quattro punti di contatto dei suoi lati. Le due tangenti condotte dal punto A alla circonferenza, cioè AE , ed AH sono eguali, lo stesso dicasi di quelle tirate dagli altri tre vertici B, C, D .

Si hanno dunque le quattro eguaglianze:

$$\begin{aligned} AE &= AH, & BE &= BF, \\ DG &= DH, & CG &= CF. \end{aligned}$$

Sommandole membro a membro ne risulta :

$$AE + BE + DG + CG = AH + DH + BF + CF,$$

ossia: $AB + CD = BC + AD,$

come si voleva provare.

2.° Viceversa abbiassi nel quadrilatero $ABCD$ (fig. 144) che $AB + CD = BC + AD$, e vogliasi dimostrare che in questo quadrilatero si può inscrivere un circolo. Si dividano gli angoli A e B per metà colle bisettrici AO , BO che si incontreranno in un punto O interno al medesimo, e che sarà equidistante dai tre lati AB , BC , AD . Questo punto è anche alla medesima distanza dal quarto lato CD . Difatto abbassate le quattro perpendicolari OP , OR , OS , OT sui lati del quadrilatero si supponga che la OT non eguagli le altre, ma ne sia, per esempio, minore. Si prolunghi allora finchè sia $OV = OD$, quindi pel punto V si conduca la EF parallela a CD . Quest'ultima retta forma allora colle tre altre AD , AB , AC un quadrilatero circoscritto al circolo di raggio OP . Si ha dunque pel teorema sopra dimostrato che :

$$AB + EF = AE + BF.$$

Ma la retta EF è più corta della spezzata $EDCF$; si ha dunque :

$$EF < ED + CD + CF,$$

e aggiungendo da ambo i lati AB :

$$AB + EF < AB + CD + ED + CF.$$

Inoltre :

$$AB + EF = AE + BF = AD + DE + BC + CF,$$

e perciò sostituendo :

$$AD + DE + BC + CF < AB + CD + ED + CF,$$

e riducendo : $AD + BC < AB + CD,$

conclusione assurda perchè opposta all'ipotesi di partenza. Ad un simile assurdo si giungerebbe col supporre che la OT fosse più grande di OP . E perciò il circolo descritto con

centro O e raggio OP è tangente ai quattro lati del quadrilatero.

COROLLARIO 1.° *Sono inscrittibili al circolo i rettangoli ed i trapezi isosceli, che son quelli in cui i lati non paralleli sono eguali e perciò egualmente inclinati alle basi.*

COROLLARIO 2.° *Le losanghe sono circoscrivibili.*

COROLLARIO 3.° *Il quadrato è inscrivibile e circoscrivibile.*

§ 51.

Definizione dei poligoni regolari. Ad un poligono regolare si può sempre iscrivere o circoscrivere un circolo. Se una circonferenza di circolo è divisa in parti eguali, il poligono inscritto formato dalle corde tirate pei consecutivi punti di divisione e quello circoscritto formato dalle tangenti condotte per i punti medesimi, sono regolari.

Si chiama *poligono regolare* ogni poligono che ha i suoi lati eguali e gli angoli eguali. Così il triangolo equilatero ed il quadrato son poligoni regolari.

Teorema.

Ogni poligono regolare può essere inscritto e circoscritto ad un circolo (fig. 145).

1.° Sia $ABCDEF$ il poligono regolare. Fatta passare una circonferenza pei tre vertici A, B, C si comincerà col dimostrare che essa passa anche pel vertice D . Difatto per le metà G, H dei lati AB, BC condotte ai medesimi le perpendicolari GO, HO , esse si incontreranno nel centro O della circonferenza che passa per A, B, C . Si tirino allora OA ed OD e si sovrappongano i due quadrilateri $AOHB, OHCD$ facendo ruotare il secondo intorno al lato comune OH . Siccome gli angoli OHC, OHB sono ambedue retti, il lato HC prende la direzione HB , ed essendo poi HB eguale ad HC , il punto C cade in B . Indi essendo anche eguali gli angoli B e C del poligono regolare, il lato CD prende la direzione BA , e per essere $CD = BA$, il punto D cade in A . Dunque le

rette OD , OA , sovrapponendosi, sono eguali e la circonferenza in quistione passa anche per D .

Si dimostrerebbe in simil guisa che questa circonferenza passa per gli altri vertici del poligono che è perciò inscritto.

2.° I lati AB , BC , ec., del poligono essendo corde eguali sono egualmente distanti dal centro e perciò le perpendicolari sui detti lati OG , OH , ec., sono eguali. Dunque fatto centro in O e con raggio OH descritta una circonferenza, essa passa per le metà di tutti i lati del poligono e risulta a tutti tangente. Quindi il poligono è circoscrivibile al circolo.

SOLIO. Il punto O che è il centro comune dei circoli inscritto e circoscritto dicesi *centro* del poligono.

Si chiamano *raggio* ed *apotema* del poligono regolare il raggio del circolo circoscritto ed inscritto.

Angolo al centro del poligono è quello fatto da due raggi consecutivi. Tutti gli angoli al centro di un dato poligono regolare sono eguali perchè intercettano archi eguali sulla circonferenza. Ad averne il valore in gradi basta dividere 360 pel numero dei lati del poligono. Applicando quest'osservazione si troverà:

L'angolo al centro del triangolo equilatero.	120°.
„ del quadrato	90°.
„ pentagono regolare.	72°.
„ esagono.	60°.
„ decagono	36°.
„ pentadecagono	24°.

Teorema.

Se una circonferenza è divisa in parti eguali, il poligono inscritto formato dalle corde che uniscono i punti di divisione e quello circoscritto costituito dalle tangenti condotte pei medesimi punti, sono regolari (fig. 146).

1.° Gli archi AB , BC , CD ec. essendo eguali, le loro corde sono pure eguali ed il poligono $ABCDEF$ ha tutti i lati eguali. L'angolo inscritto ABC eguaglia poi gli angoli BCD , CDE , ec., giacchè tutti hanno per misura la metà di archi eguali. Quindi il poligono inscritto è regolare.

2.° Il poligono $GHIKLM$ è pure regolare. Difatto i triangoli GAB , HBC , ec., son tutti isosceli giacchè le tangenti condotte da un punto esterno al circolo sono eguali, di più sono eguali tutti fra loro come è facile lo scorgere, considerandone due qualunque come GAB , ICD inquantochè il lato $AB = CD$ come lati del poligono regolare $ABCDEF$, l'angolo GAB è eguale a ICD e $GBA = IDC$ perchè essendo formati da una tangente e da una corda hanno la medesima misura. Dall'eguaglianza dei citati triangoli risulta, prima l'eguaglianza degli angoli G , H , I , ec., del poligono circoscritto, indi quella delle tangenti GA , GB , HB , HC , ec., e per conseguenza dei lati GH , HI , ec., che ne sono il doppio.

E perciò il poligono $GHIKLM$ è esso pure regolare.

§ 52.

Dato un poligono regolare inscritto in un circolo circoscrivere allo stesso circolo un poligono regolare dello stesso numero di lati e viceversa. Formule che fanno conoscere il lato di questi due poligoni in funzione del lato dell'altro e del raggio del circolo.

Problema.

Dato un poligono regolare inscritto in un circolo, circoscrivere allo stesso circolo un poligono regolare dello stesso numero di lati e viceversa (fig. 146).

1.° Sia $ABCDEF$ il poligono regolare inscritto. Condotte dai suoi vertici le tangenti al circolo, esse formeranno un nuovo poligono che sarà regolare per la dimostrazione del precedente teorema.

2.° Sia $GHIKLM$ un poligono regolare dato. Uniti i punti di contatto dei suoi lati fra loro si formerà un nuovo poligono regolare inscritto attesa l'eguaglianza degli archi AB , BC , ec., intercetti sul circolo dalle tangenti GH , HI , ec.

Problema. 4

Determinare le formule che legano fra loro i lati di due poligoni regolari inscritto e circoscritto dello stesso numero di lati (fig. 147).

Sieno AB e CD i lati dei due poligoni che naturalmente hanno lo stesso angolo al centro AOB . Si chiami il lato AB , L , il lato CD , l e sia R il raggio del circolo. Dai triangoli simili AOB , COD , avremo la proporzione:

$$AB : CD :: OA : OC,$$

ossia: $L : l :: OA : R,$

e perciò: $OA = \frac{RL}{l}.$

Ora condotto il raggio OE al punto di contatto del lato AB del poligono circoscritto, nel triangolo rettangolo OEA , si avrà:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{AE}^2,$$

ovvero: $\frac{R^2 L^2}{l^2} = R^2 + \frac{L^2}{4},$

e fatti sparire i denominatori:

$$4 R^2 L^2 = 4 R^2 l^2 + L^2 l^2.$$

Questa formula è quella cercata e può servire a volontà a far conoscere L quando sia cognito l e viceversa. Nel primo caso sarà:

$$L = \frac{2 R l}{\sqrt{4 R^2 - l^2}},$$

e nel secondo:

$$l = \frac{2 R L}{\sqrt{4 R^2 + L^2}}.$$

§ 53.

Inscrivere in un circolo i poligoni regolari di 3, 4, 5, 6, 10 e 15 lati. Formule che fanno i lati dei primi cinque poligoni in funzione del raggio.

Problema.

Inscrivere un quadrato in un circolo e determinarne il lato in funzione del raggio del circolo (fig. 148).

Si tirino due diametri AB , CD perpendicolari fra loro, indi si uniscano i punti A , C , B , D , nei quali questi diametri incontrano la circonferenza. La figura $ACBD$ che ha le diagonali eguali e perpendicolari sarà un quadrato.

A determinarne il lato si osservi che chiamato R il raggio nel triangolo rettangolo AOC , si ha:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2,$$

ovvero: $\overline{AC}^2 = 2 \overline{R}^2$ e $AC = R \sqrt{2}$.

ESEMPIO. Se il raggio del circolo fosse di 2^m, si avrebbe pel lato del quadrato $\sqrt{8}$, ovvero a meno di un centimetro 2^m, 82.

Problema.

Inscrivere un esagono regolare ed un triangolo equilatero in un circolo e trovarne i lati in funzione del raggio (fig. 149).

1.° Sia AB il lato dell'esagono regolare. Si tirino le rette AO , OB e si osservi quindi che l'angolo al centro dell'esagono AOB essendo di 60°, nel triangolo AOB la somma degli altri due angoli dovrà risultare di 120° e quindi ognuno di essi di 60°, talchè in definitiva il triangolo AOB è equilatero e perciò il lato AB dell'esagono eguaglia il raggio.

2.° Riunendo due a due i vertici dell'esagono regolare si forma il triangolo equilatero ACE .

Per calcolarne il lato si osserverà che tirato il diametro AD , il triangolo ACD è rettangolo in C , perchè quest'an-

golo è inscritto nel semi-cerchio. Si ha dunque nel medesimo che :

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$$

donde: $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2;$

o anche: $\overline{AC}^2 = 4 R^2 - R^2 = 3 R^2,$

donde: $AC = R \sqrt{3}.$

Supposto, per esempio, $R = 2^m$, il lato del triangolo equilatero inscritto sarà espresso da :

$$\sqrt{12} = 3^m, 46.$$

Problema. χ

Inscrivere un decagono ed un pentagono regolare in un circolo e calcolarne i lati in funzione del raggio (fig. 150).

1.° Si divida il raggio in media ed estrema ragione, il maggiore segmento OC di questa divisione eguaglierà il lato AB del decagono.

Tirate difatto le rette AC , AO noi avremo, avanti ogni altra cosa ed in forza dell'eseguita divisione, che:

$$BO : OC :: OC : CB,$$

e posto AO nel luogo di BO e AB in quello di OC :

$$AO : AB :: OC : CB.$$

Questa proporzione prova intanto che la retta AC è bisettrice dell'angolo OAB .

La prima proporzione potendo anche scriversi:

$$BO : AB :: AB : BC,$$

mostra che i triangoli AOB , ABC hanno un angolo B comune compreso fra lati proporzionali e son perciò simili ed equiangoli. Si ha dunque:

$$BAC = AOC.$$

Ma per esser AC bisettrice dell'angolo BAO :

$$BAC = CAO,$$

e perciò:

$$AOC = CAO.$$

L'angolo OAB è dunque doppio dell'angolo O e lo stesso può dirsi dell'angolo ABO eguale al primo. Ora nel triangolo AOB la somma dei tre angoli forma 180° , talchè vi abbiamo:

$$O + OAB + OBA = 180^\circ,$$

$$\text{ossia: } 5O = 180^\circ \text{ e } O = 36^\circ.$$

E perciò l'arco AB che misura l'angolo al centro O è realmente la decima parte della circonferenza. Riportata quindi la lunghezza AB per dieci volte sulla curva avremo inscritto il decagono.

COROLLARIO 1.° *La retta AB essendo il maggior segmento del raggio diviso in media ed estrema ragione, sarà perciò espressa da:*

$$(\S\ 47) \frac{R}{2} [\sqrt{5} - 1].$$

ESEMPIO. Se $R = 2^m$, avremo pel lato del decagono approssimativamente $1^m, 23$.

2.° Uniti due a due i vertici del decagono, si otterrà il pentagono regolare inscritto.

COROLLARIO 2.° *Il quadrato del lato del pentagono regolare inscritto eguaglia il quadrato del lato del decagono, più il quadrato del raggio (fig. 151).~*

Sieno AB e BC i lati del pentagono e decagono regolari inscritti. L'angolo al centro BOA del pentagono è di 72° come pure è di 72° l'angolo CBO del triangolo isoscele CBO . Siccome poi questi due angoli sono alterni-interni fra le rette CB , OA secate da BO , ne viene che queste rette son parallele. Ciò posto si prolunghi BC e si tiri dal punto O la OD parallela ad AB limitandola fino all'incontro di questo prolungamento, indi dal punto così determinato D si tiri DE tangente al circolo e si conduca infine il raggio OE . Il quadrilatero $OABD$ essendo un parallelogrammo, il lato BD

eguaglia il raggio OA come quello OD eguaglia il lato del pentagono. Di più la BC essendo eguale al maggior segmento del raggio diviso in media ed estrema ragione, si ha:

$$BD : BC :: BC : DC.$$

D'altronde un teorema cognito dà:

$$DB : DE :: DE : DC,$$

e queste due proporzioni combinate mostrano che $DE = BC$, vale a dire che la tangente DE ha la stessa lunghezza del lato del decagono. Talchè nel triangolo rettangolo ODE avendosi:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{DE}^2,$$

cambiando DO in AB e DE in BC , risulta:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{BC}^2,$$

come volevasi provare.

SOLIO. Sostituendo ora al posto del raggio il suo valore R e a quello di BC l'espressione:

$$\frac{R}{2} [\sqrt{5} - 1],$$

si ottiene: $\overline{AB}^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} [\sqrt{5} - 1]^2 =$

$$R^2 + \frac{5R^2}{4} + \frac{R^2}{4} - \frac{2R^2}{4} \sqrt{5} = \frac{10R^2 - 2R^2 \sqrt{5}}{4},$$

donde: $AB = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$

Supposto, per esempio, che il raggio R sia di 2^m , otterremo fatti i calcoli indicati $AB = 2^m, 35$ circa.

Problema.

Inscrivere un pentadecagono regolare in un circolo.

Si determini mediante i cogniti metodi un arco di 60° e un altro di 36° , che avranno per corde rispettive i lati del-

l'esagono e del decagono regolare inscritto. La loro differenza essendo di 24° avrà per corda il lato del pentadecagono che sarà così facile d'inscrivere.

§ 54.

Un poligono regolare essendo inscritto o circoscritto ad un circolo, inscrivere o circoscrivere nel medesimo circolo un altro poligono regolare di numero doppio di lati. Formule che, dato il lato di uno di questi poligoni e il raggio del circolo, fanno conoscere il lato dell'altro poligono.

Problema.

Dato un poligono regolare inscritto o circoscritto, inscrivere o circoscrivere nel medesimo circolo un altro poligono regolare di numero doppio di lati.

I due problemi non possono offrire difficoltà. Basta dividere, nel primo caso, per metà gli archi compresi fra i vertici del poligono inscritto e nel secondo quelli compresi fra i punti di contatto dei lati del poligono circoscritto.

Problema. y

Dato il lato di un poligono regolare inscritto, trovare quello del poligono regolare pure inscritto, ma di numero doppio di lati (fig. 152).

Sia $AB = l$ il lato di un poligono regolare inscritto ed $AC = l'$ quello del poligono di numero doppio di lati, essendo sempre R il raggio del circolo. Tirato il diametro COD e il raggio OA , non che la retta AD per una nota proprietà del triangolo rettangolo, avremo che il cateto AC sarà medio proporzionale fra l'ipotenusa CD e il segmento CE , ossia che:

$$2R : l' :: l' : CE,$$

donde:
$$l'^2 = 2R \times CE.$$

Ma:
$$CE = CO - OE = R - OE$$

e OE si deduce a sua volta dall'altro triangolo rettangolo OAE che dà:

$$OE^2 = AO^2 - AE^2,$$

ovvero: $OE = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l^2}.$

Dunque:

$$CE = R - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l^2} = \frac{1}{2} [2R - \sqrt{4R^2 - l^2}],$$

talchè infine:

$$l^2 = R [2R - \sqrt{4R^2 - l^2}],$$

e

$$l' = \sqrt{R [2R - \sqrt{4R^2 - l^2}]}.$$

ESEMPIO. Vogliasi conoscere il lato dell'ottagono regolare inscritto nel circolo di raggio 2^m. Avendo già trovato che quello l del quadrato è 2^m,82, avremo:

$$l' = \sqrt{2(4 - \sqrt{16 - (2,82)^2})},$$

e fatti i calcoli: $l' = 1^m,52$ circa.

✕ Problema.

Dato il lato di un poligono regolare circoscritto trovare quello del poligono pure circoscritto del numero doppio di lati.

Sia L il lato del poligono circoscritto, L' quello del poligono di numero doppio di lati e siano l , l' i lati dei poligoni inscritti corrispondenti. Per le formule già trovate avremo le tre relazioni:

$$\begin{aligned} 4R^2 L^2 &= 4R^2 l^2 + L^2 l^2, \\ 4R^2 L'^2 &= 4R^2 l'^2 + L'^2 l'^2, \\ l'^2 &= R(2R - \sqrt{4R^2 - l^2}). \end{aligned}$$

Se elimineremo fra le medesime le quantità l , l' l'equazione risultante fra L , L' , R potrà servire a risolvere il problema. Dalla prima si ha:

$$l^2 = \frac{4R^2 L^2}{4R^2 + L^2}.$$

Portato questo valore nella terza, essa diviene:

$$l'^2 = R \left[2R - \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2 L^2}{4R^2 + L^2}} \right].$$

Riducendo al medesimo denominatore e semplicizzando:

$$l^2 = \frac{R [2R \sqrt{4R^2 + L^2}] - 4R^2}{\sqrt{4R^2 + L^2}}.$$

Si sostituisca questo valore di l^2 nella seconda fra le equazioni stabilite, ne viene:

$$4R^2 L'^2 = \frac{4R^2 [2R \sqrt{4R^2 + L^2} - 4R^2]}{\sqrt{4L^2 + R^2}} + \frac{RL'^2 [2R \sqrt{4R^2 + L^2} - 4R^2]}{\sqrt{4R^2 + L^2}}.$$

Fatti sparire i denominatori e soppresso il fattore R^2 comune a tutta l'eguaglianza, risulta:

$$4L'^2 \sqrt{4R^2 + L^2} = 4R [2R \sqrt{4R^2 + L^2} - 4R^2] + L'^2 [2\sqrt{4R^2 + L^2} - 4R].$$

Sviluppando e riducendo:

$$4RL'^2 + 2L'^2 \sqrt{4R^2 + L^2} = 4R [2R \sqrt{4R^2 + L^2} - 4R^2].$$

E perciò:
$$L'^2 = \frac{4R^2 [\sqrt{4R^2 + L^2} - 2R]}{\sqrt{4R^2 + L^2} + 2R},$$

ed infine:
$$L' = 2R \sqrt{\frac{\sqrt{4R^2 + L^2} - 2R}{\sqrt{4R^2 + L^2} + 2R}}.$$

ESEMPIO. Vogliasi applicare questa formula alla determinazione in funzione del raggio del lato dell'ottagono circoscritto. Occorrerà prima di tutto trovare quello del quadrato pure circoscritto, ma osservato che questo è evidentemente eguale al diametro, non rimane se non che a porre $L = 2R$ nella formula di sopra, il che dà:

$$\sqrt{4R^2 + L^2} = \sqrt{8R^2} = R\sqrt{8} = 2R\sqrt{2},$$

e perciò:
$$L' = 2R \sqrt{\frac{2R\sqrt{2} - 2R}{2R\sqrt{2} + 2R}},$$

ovvero:
$$L' = 2 R \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}.$$

Se R fosse, per esempio, 2^m :

$$L' = 4 \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}},$$

e fatti i calcoli: $L' = 1^m, 65$ circa.

§ 55.

L'area di un poligono regolare è eguale al prodotto del suo perimetro per la metà del suo apotema. Due poligoni regolari di egual numero di lati sono simili. I loro perimetri stanno fra loro come i raggi dei cerchi inscritti o circoscritti, e le loro aree come i quadrati dei raggi medesimi. Come dai teoremi precedenti si deducano per analogia queste conseguenze: 1.° Ogni circolo ha per misura la metà del prodotto della sua circonferenza rettificata pel suo raggio; 2.° Ogni settore circolare ha per misura la metà del prodotto del suo arco rettificato pel suo raggio; 3.° Due circonferenze di circolo stanno fra loro come i loro raggi; 4.° Le aree di due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi.

Teorema.

L'area di un poligono regolare è eguale al prodotto del suo perimetro per la metà del suo apotema (fig. 153).

Sia O il centro del poligono regolare. Tirati i raggi OA , OB , OC , ec., lo si decompone in tanti triangoli quanti sono i suoi lati. Tutti questi triangoli hanno un'altezza eguale all'apotema OG del poligono, in guisa che le loro superfici rispettive saranno:

$$\frac{AB \times OG}{2}, \frac{BC \times OG}{2}, \text{ ec.}$$

E perciò l'area totale del poligono verrà data da:

$$\frac{OG}{2} [AB + BC +, \text{ ec.}] = \frac{OG}{2} \times P,$$

quando si chiami P il perimetro.

COROLLARIO. *L'area di un poligono regolare circoscritto ad un circolo eguaglia il prodotto del suo perimetro per la metà del raggio del circolo inscritto.*

Questo corollario è il teorema precedente, enunciato sotto altra forma.

SOLIO. Vogliasi trovare l'area dell'esagono regolare avente 2^m di lato.

Il suo perimetro sarà di $6 \times 2 = 12^m$. A determinarne l'apotema ci serviremo del triangolo rettangolo AOG , nel quale si ha:

$$OG^2 = AO^2 - AG^2,$$

e nel nostro caso speciale:

$$OG^2 = 4 - 1 = 3 \text{ e } OG = \sqrt{3} = 1,73.$$

Quindi l'area del poligono è $\frac{1,73 \times 12}{2}$, ossia 10^m, 38.

Teorema.

Due poligoni regolari di egual numero di lati sono simili. I loro perimetri stanno fra loro come i raggi dei circoli inscritti o circoscritti e le loro aree come i quadrati di questi medesimi raggi (fig. 154).

1.° Siano, per esempio, i due esagoni regolari $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F'$.

La somma degli angoli di un esagono qualunque essendo di 8 retti ogni angolo dei due poligoni vale $\frac{8}{6}$ di angolo retto. Quindi i detti poligoni hanno gli angoli eguali. Di più il rapporto di due lati qualsiasi essendo l'unità in ciascuno di essi, ne consegue la proporzionalità dei lati omologhi. Perciò i poligoni son simili.

2.° I due esagoni essendo simili detti P , P' i loro perimetri, si ha per un noto teorema:

$$P : P' :: AB : A'B'.$$

Ora i triangoli isosceli AOB , $A'O'B'$ hanno un angolo $O = O'$ compreso fra lati proporzionali, e perciò son simili, talchè ne viene:

$$AB : A'B' :: OA : O'A'.$$

Dal paragone della proporzione antecedente con quella trovata più sopra ne emerge:

$$P : P' :: OA : O'A',$$

vale a dire che i perimetri dei due poligoni son proporzionali ai raggi dei circoli circoscritti.

Infine i triangoli rettangoli AOG , $A'O'G'$, essendo anche equiangoli e simili per avere l'angolo $AOG = A'O'G'$ come metà di angoli eguali, daranno:

$$OA : O'A' :: OG : O'G',$$

proporzione che combinata con l'ultima, conduce all'altra:

$$P : P' :: OG : O'G',$$

vale a dire che i perimetri son anche proporzionali agli apotemi.

3.° Essendo simili i due poligoni per un noto teorema, noi avremo indicando con S , S' le loro aree:

$$S : S' :: \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2.$$

Ma elevando al quadrato due delle proporzioni trovate al n.° 2, si ottiene:

$$\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 :: \overline{AO}^2 : \overline{A'O'}^2,$$

$$\overline{AO}^2 : \overline{A'O'}^2 :: \overline{OG}^2 : \overline{O'G'}^2,$$

talchè in definitiva potrà stabilirsi:

$$S : S' :: \overline{AO}^2 : \overline{A'O'}^2 :: \overline{OG}^2 : \overline{O'G'}^2.$$

Si chiama *variabile* ogni quantità che in un dato quesito è suscettibile di acquistare successivamente diversi valori.

Una variabile è *indipendente* quando i suoi valori sono arbitrarii; è *dipendente* o *funzione* di altre quantità quando i suoi valori son resultanti da quelli di queste medesime quantità.

Per esempio, l'area di un triangolo è una funzione tanto della sua base come dell'altezza.

Limite di una variabile qualunque è una quantità fissa a cui la variabile si approssima indefinitamente senza potervi mai giungere. Da ciò risulta ad evidenza che una variabile non può avere che un limite.

Lemma.

Se due variabili tendono verso due limiti e approssimandovisi rimangono sempre eguali, i loro limiti son pure eguali.

Sieno v, v' le variabili, l, l' i rispettivi limiti. Se v è sempre eguale a v' le quantità $l - v, l - v'$ son esse pur sempre eguali e tendono verso zero. Dunque v' si approssima indefinitamente alla quantità l come v , e siccome una variabile non può avere che un limite $l = l'$.

Lemma.

Se due variabili tendono verso due diversi limiti, la somma delle variabili ha per limite la somma dei limiti.

Sieno v, v' le due variabili, l, l' i loro limiti. Si ha identicamente :

$$(l + l') - (v + v') = (l - v) + (l' - v').$$

Ora le differenze $l - v, l' - v'$ diminuiscono indefinitamente a misura che v, v' tendono verso i loro limiti l, l' . Quindi la somma $v + v'$ si approssima indefinitamente verso l'altra $l + l'$.

COROLLARIO. *Si dimostra identicamente che la differenza di due variabili ha per limite la differenza dei loro limiti.*

Lemma.

Il prodotto di due variabili ha per limite il prodotto dei loro limiti.

Sieno v, v' le variabili, l, l' i loro limiti. Avremo l'identità:

$$l \times l' - v \times v' = (l - v) l' + v (l' - v').$$

Ora le differenze $l - v, l' - v'$ tendendo amendue verso zero, quando le variabili si approssimano ai loro limiti, i

prodotti $(l - v) l'$, $v (l' - v')$ e perciò anche la loro somma tenderanno pure verso lo zero. Per conseguenza il prodotto $v \times v'$ si approssima indefinitamente alla quantità fissa $l \times l'$ che ne è così il limite.

COROLLARIO. *Il quoziente di due variabili ha per limite il quoziente dei loro limiti.*

Si dimostra in modo identico.

Teorema.

La circonferenza è il limite dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti.

Il circolo è il limite delle superfici di questi poligoni.

1.° Sieno P , p i perimetri di due poligoni regolari di n lati circoscritti ed inscritti nel circolo. Se si fa crescere indefinitamente il numero dei lati di questi poligoni, la variabile p cresce sempre, restando però al disotto della circonferenza, e ciò giacchè sappiamo che una linea poligona convessa è minore di ogni altra che la inviluppi. Viceversa la variabile P diminuisce per identica ragione.

Per dimostrare adunque che la circonferenza è il limite comune delle due variabili, basta dimostrare che la differenza $P - p$ diminuisce indefinitamente quando n cresce.

Sia AB il lato del poligono (fig. 155) di perimetro p e CD quello del poligono di perimetro P . I due poligoni essendo simili, si ha:

$$P : p :: OF : OE,$$

e componendo per sottrazione:

$$P - p : P :: OF - OE : OF,$$

e perciò:
$$P - p = P \frac{(OF - OE)}{OF} = \frac{P \times EF}{OF}.$$

Ora la linea EF è minore della corda dell'arco AF che è il lato del poligono di $2n$ lati e questa decresce indefinitamente al crescere di n , di più anche P decresce, mentre il raggio OF è costante. Perciò la frazione che rappresenta $P - p$ scema indefinitamente e tende perciò verso zero.

La circonferenza è dunque il limite dei due perimetri.

2.° Sieno S ed s le aree dei poligoni. Per un teorema cognito si ha:

$$S : s :: \overline{OF}^2 : \overline{OE}^2,$$

e componendo per sottrazione:

$$S - s : S :: \overline{OF}^2 - \overline{OE}^2 : \overline{OF}^2,$$

donde:
$$S - s = S \frac{(\overline{OF}^2 - \overline{OE}^2)}{\overline{OF}^2} = \frac{S \times \overline{AE}^2}{\overline{OF}^2}$$

Ma AE è minore della corda AF che è il lato del poligono regolare di $2n$ lati e perciò decresce indefinitamente, S decresce pure, mentre OF è costante, talchè il valore della frazione che eguaglia $S - s$ tende verso lo zero. Ma l'area S è sempre più grande di quella del circolo, mentre s è sempre minore, dunque il circolo è il limite comune delle due aree.

Teorema.

Il circolo ha per misura il prodotto della sua circonferenza rettificata per la metà del raggio.

Sia S l'area e P il perimetro di un poligono regolare circoscritto al circolo di raggio R . Noi sappiamo che $S = \frac{P \times R}{2}$. Si faccia variare ora la S raddoppiando indefinitamente il numero dei lati del poligono. Essa avrà per limite la superficie del circolo come P ha per limite la circonferenza. E siccome in queste variazioni le quantità S e $\frac{R \times P}{2}$ si mantengono sempre eguali, dovrà sussistere eguaglianza fra i loro limiti e avremo:

$$\text{circolo} = \frac{R}{2} \times \text{circonferenza}.$$

Teorema.

In un medesimo circolo o in circoli eguali, due settori qualunque stanno fra loro come gli archi.

Si dimostra in modo identico a quel che fu fatto per stabilire la proporzionalità fra gli angoli e gli archi intercetti fra i loro lati.

Teorema.

L'area di un settore eguaglia il prodotto del suo arco rettificato per la metà del raggio (fig. 156).

Sia nel circolo C , ACB il settore dato. Pel teorema precedente e considerato il circolo come un settore che ha per base la circonferenza, noi avremo:

$$\frac{\text{sett. } ACB}{\text{circolo } C} = \frac{\text{arco } AB}{\text{circonf.}},$$

e moltiplicando numeratore e denominatore per la metà del raggio CA :

$$\frac{\text{sett. } ACB}{\text{circolo}} = \frac{\text{arco } AB \times \frac{CA}{2}}{\text{circonf.} \times \frac{CA}{2}}.$$

Ma: $\text{circolo} = \text{circonf.} \times \frac{CA}{2},$

quindi dovrà anche essere:

$$\text{sett. } ACB = \text{arco } AB \times \frac{CA}{2}.$$

Teorema.

Due circonferenze stanno fra loro come i raggi.

Sieno P, P' i perimetri di due poligoni regolari di n lati circoscritti alle due circonferenze di raggio R, R' . Se si suppone che n cresca, le variabili $\frac{P}{R}, \frac{P'}{R'}$ avranno per limiti:

$$\frac{\text{circonf. } R}{R}, \frac{\text{circonf. } R'}{R'}.$$

Ora noi sappiamo che $\frac{P}{R} = \frac{P'}{R'}$, quindi deve anche essere:

$$\frac{\text{circonf. } R}{R} = \frac{\text{circonf. } R'}{R'},$$

ossia: $\text{circonf. } R : \text{circonf. } R' :: R : R'.$

COROLLARIO. *Il rapporto della circonferenza al diametro è costante.*

Se si considerano diverse circonferenze $C, C', C'',$ ec., di raggi $R, R', R'',$ ec., pel teorema dimostrato, avremo:

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} = \frac{C''}{R''}, \text{ ec.,}$$

e perciò anche: $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'} = \frac{C''}{2R''}, \text{ ec.}$

Questo rapporto costante che si suole indicare colla lettera greca π fu trovato per la prima volta dal celebre Archimede duecento cinquant'anni avanti l'era volgare. Esso lo valutò a $\frac{22}{7}$. Mezio geometra olandese del secolo XVII ne ha dato il valore più approssimato in $\frac{355}{113}$. Con metodi risultanti dall'alta analisi Lagny lo ha valutato con 144 cifre decimali ed ha trovato:

$$\pi = 3,1415926, \text{ ec.}$$

Teorema.

Le aree di due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi.

Sieno S, S' le aree di due cerchi che abbiano per raggi R, R' e per circonferenze C, C' . Noi sappiamo che:

$$S = \frac{C R}{2}, \quad S' = \frac{C' R'}{2},$$

donde:

$$\frac{S}{S'} = \frac{C R}{C' R'}.$$

Ma si sa pure che:

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'};$$

Quindi:

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2},$$

come volevasi provare.

§ 56.

Dimostrare come inscrivendo e circoscrivendo successivamente ad un circolo un poligono regolare di un numero di lati sempre doppio del precedente e calcolando le lunghezze dei perimetri di questi poligoni si possa avere un valore prossimo al vero del rapporto della circonferenza del circolo al suo diametro. Varii valori approssimativi di questo rapporto. Espressioni della lunghezza della circonferenza e dell'area di un circolo mediante il raggio.

Problema.

Calcolare approssimativamente il rapporto della circonferenza al diametro.

Il rapporto della circonferenza al diametro essendo costante, qualunque sia il raggio del circolo, noi potremo sce-

gliere per valutarlo quella circonferenza che ha per raggio l'unità, nel qual caso $\pi = \frac{C}{2}$. Il problema è dunque ridotto alla valutazione della lunghezza di una circonferenza di raggio 1. Ora siccome una circonferenza è il limite dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti, si concepisce come calcolando i perimetri dei poligoni regolari di 4, 8, 16, 32, ec., lati inscritti o circoscritti e prendendo uno di questi o meglio la media aritmetica fra un perimetro inscritto e il corrispondente circoscritto pel valore della circonferenza, si commetterà un errore tanto minore, quanto più lati avrà il poligono regolare prescelto.

Ridotta la quistione in questo stato nulla osta alla sua soluzione, giacchè noi abbiamo le formule che ci danno il lato di un poligono inscritto o circoscritto in funzione di quello che ha un numero di lati metà. Applicandole adunque e facendo i calcoli numerici convenienti, detti l , l' , l'' , ec., i lati dei poligoni inscritti di 4, 8, 16, ec., lati e L , L' , L'' , ec., i lati dei corrispondenti circoscritti, si troverà:

$l = \sqrt{2} = 1,414,$	$L = 2,$
$l' = 0,765,$	$L' = 0,828,$
$l'' = 0,390,$	$L'' = 0,397,$
$l''' = 0,196, \text{ ec.}$	$L''' = 0,1967, \text{ ec.}$

I perimetri corrispondenti ai diversi poligoni saranno dunque:

Poligoni inscritti.	Poligoni circoscritti.
$4 l = 5,656,$	$4 L = 8,$
$8 l' = 6,120,$	$8 L' = 6,624,$
$16 l'' = 6,240,$	$16 L'' = 6,352,$
$32 l''' = 6,272, \text{ ec.}$	$32 L''' = 6,2944, \text{ ec.}$

Volendo per conseguenza arrestarsi al poligono di 32 lati, presa la media aritmetica fra i numeri 6,272 e 6,2944, il valore risultante 6,2832 esprimerà approssimativamente la circonferenza di raggio 1, e perciò:

$$\pi = \frac{C}{2} = 3,1416.$$

Come si vede questo valore non è esatto che fino alla terza cifra decimale. Ma si capisce come raddoppiando ancora e per varie volte i lati dei poligoni si potrebbe giungere ad approssimazione maggiore.

Rimarrebbe a indicare come l'accennato metodo possa modificarsi per modo da render conto del grado di approssimazione ottenuta, ma questa ricerca escirebbe dai limiti del programma, avendosi qui il solo scopo di far vedere come la sola geometria elementare possa ritenersi a rigore sufficiente per darci il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro.

COROLLARIO 1.^o *Dall'eguaglianza:*

$$\frac{C}{2R} = \pi,$$

si deduce a volontà: $C = 2\pi R,$

oppure: $R = \frac{C}{2\pi}.$

E perciò:

1.^o Per calcolare la lunghezza di una circonferenza di raggio dato, basta moltiplicare questo raggio pel doppio del numero π .

2.^o Per calcolare il raggio di una data circonferenza basta dividerne la lunghezza pel doppio del numero π .

ESEMPIO. Sia: $R = 2^m,$

avremo: $C = 4 \times 3,141, \text{ ec., } = 12^m, 564 \text{ circa.}$

Invece essendo: $C = 10^m,$

$$R = \frac{10}{6,282} = 1^m, 59 \text{ circa.}$$

COROLLARIO 2.^o *Valutare la lunghezza l di un arco di n gradi nel circolo di raggio R .*

La circonferenza intiera essendo $2\pi R$, un grado che ne è la 360.^a parte sarà dato da $\frac{2\pi R}{360}$, e perciò l'arco l di n gradi si calcolerà colla formula:

$$l = \frac{2\pi R n}{360} = \frac{\pi R n}{180}.$$

ESEMPIO. Sia: $R = 2^m$, $n = 35^\circ$,

ne verrà: $l = \frac{3,141 \times 2 \times 35}{180},$

e fatti i calcoli: $l = 1^m, 221$ circa.

COROLLARIO 3.° *L'area S di un circolo di raggio R e di circonferenza C essendo data da:*

$$S = \frac{CR}{2}$$

se vi si sostituisce per C il suo valore $2\pi R$ si otterrà:

$$S = \pi R^2 \text{ e } R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

E perciò:

1.° Per calcolare l'area di un circolo di raggio dato, si moltiplichino il quadrato di questo raggio pel rapporto della circonferenza al diametro.

2.° Si ottiene la lunghezza del raggio di un circolo di cui è data l'area, dividendo quest'area pel numero π , ed estraendo la radice quadrata dal quoziente.

ESEMPIO. Sia $R = 2^m$, ne verrà:

$$S = 4 \times 3,141, \text{ ec.}, = 12^m, 564.$$

Se invece fosse dato $S = 10^m$, si avrebbe:

$$R = \sqrt{\frac{10}{6,282}} = 1^m, 26 \text{ circa.}$$

COROLLARIO 4.° *Indicando con A l'area di un settore circolare il cui arco è di n gradi, noi sappiamo che detto l quest'arco, si ha:*

$$A = \frac{lR}{2}.$$

Ma avendo già trovato:

$$l = \frac{\pi R n}{180},$$

ne emerge che:

$$A = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

ESEMPIO. Sia l'arco l di 35° e il raggio $R = 2^m$, avremo:

$$A = \frac{3,141 \times 4 \times 35}{360},$$

e fatti i calcoli: $A = 1^m, 221$ circa.

§ 57.

Risoluzione analitica di problemi relativi alle diverse parti
della Geometria piana.

L'impiego dei segni algebrici è di immenso giovamento nella risoluzione dei problemi geometrici. Noi ne abbiamo veduto un esempio quando si determinarono le parti di una retta divisa in media ed estrema ragione. E tanto importante è quest'applicazione dell'Algebra alla Geometria che ha potuto servire a formare una scienza a parte che si chiama *Geometria analitica*. Non è di questa che possiamo qui minimamente occuparci, ma solo vogliam dar qualche esempio che possa servire di una certa guida un po' lontana, se vuolsi, ma pur sempre utile a chi desidera occuparsi nella soluzione analitica di problemi geometrici.

Problema. /

Dati due punti A e B ed una retta CD, determinare un terzo punto M su questa retta tale che tirate AM e BM l'angolo AMC eguagli BMD (fig. 157). (Il primo angolo dicesi d'incidenza, il secondo di riflessione o viceversa).

Essendo dati i punti A, B e la retta CD si conosceranno necessariamente le lunghezze AF, BE delle perpendicolari abbassate da quei punti sulla retta, non che la distanza che separa i piedi di queste perpendicolari. Sarà invece incognita la distanza FM del punto cercato M al piede F della AF. Se si può determinarla, sarà pure determinato il punto M e con ciò risoluto il problema.

Pongasi adunque $AF = a$, $BE = b$, $FE = c$, $FM = x$; sarà $ME = c - x$. Ora se per condizione l'angolo AMF deve eguagliare BME, i due triangoli rettangoli AFM, BME risulteranno equiangoli e simili, ed avremo perciò la proporzione:

$$AF : FM :: BE : EM,$$

ossia :

$$a : x :: b : c - x,$$

donde :

$$ac - ax = bx,$$

e

$$x = \frac{ac}{a+b}.$$

Questo risultato serve quando a, b, c son date in numeri a farci conoscere la posizione del punto M , ma è anche sufficiente per indicarci il modo col quale si può costruire graficamente la soluzione del problema. Difatto dall'egualianza :

$$x = \frac{ac}{a+b},$$

emerge la proporzione :

$$a + b : a :: c : x.$$

L'incognita x è dunque una quarta proporzionale dopo le rette $a + b, a$ e c . E perciò prolungata AF di una lunghezza $AO = BE = b$, indi tirata OE e pel punto A la AM parallela alla medesima, M sarà il punto dimandato. Risulta difatto dai triangoli simili AFM, AOE che :

$$OF : AF :: FE : FM,$$

ossia : $a + b : a :: c : FM$ e $FM = \frac{ac}{a+b},$

come si era trovato dover essere.

Problema.

Inscrivere un quadrato in un semi-circolo (fig. 158).

Sia R il raggio OA del semi-circolo dato e sia $OC = x$ la metà del lato incognito del quadrato; le lunghezze CA e CB saranno rappresentate rispettivamente da $R - x$ e $R + x$. Siccome si sa che CM deve esser media proporzionale fra AC e CB , avremo :

$$CM = \sqrt{(R+x)(R-x)} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Ma d'altra parte CM è anche il lato del quadrato, lato che abbiamo indicato con $2x$; dunque deve essere :

$$2x = \sqrt{R^2 - x^2};$$

elevando a quadrato e trasportando si ottiene:

$$5x^2 = R^2,$$

donde:

$$x = \frac{R}{\sqrt{5}}.$$

Per costruire graficamente questo risultato si osserva che l'eguaglianza $5x^2 = R^2$ può trasformarsi nella proporzione:

$$R : x :: x : \frac{R}{5},$$

che prova che la metà del lato del quadrato è media proporzionale fra il raggio e il quinto del medesimo. Quindi prolungato il raggio OF di una lunghezza OG eguale alla sua quinta parte e descritta sopra FG qual diametro, una semi-circonferenza essa taglierà la OA in un punto C e OC sarà il valore cercato della x .

Problema.

Dividere un triangolo in due parti equivalenti mediante una retta perpendicolare ad un lato (fig. 19).

Sia ABC il triangolo che vuol dividersi in due parti equivalenti mediante una retta MN perpendicolare al lato BC . Tirata l'altezza AD del triangolo, si ponga $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$, e si chiami x la distanza incognita dal punto C al piede della retta MN . I triangoli simili ADC , MNC daranno la proporzione:

$$CN : CD :: MN : AD,$$

ossia:

$$x : c :: MN : a,$$

donde:

$$MN = \frac{ax}{c}.$$

L'area del triangolo MNC sarà perciò:

$$\frac{ax}{c} \times \frac{x}{2} = \frac{ax^2}{2c}.$$

Il quadrilatero $ABNM$ può scomporsi nel triangolo ABD e nel trapezio $ADNM$. La prima figura ha per area:

$$\frac{a(b-c)}{2},$$

e la seconda :

$$\frac{(AD + MN) DN}{2} = \frac{(a + \frac{ax}{c})(c - x)}{2},$$

ossia :
$$\frac{a(c + x)(c - x)}{2c} = \frac{a}{2c}(c^2 - x^2).$$

Quindi l'area del quadrilatero $ABNM$ è espressa da :

$$\begin{aligned} a \frac{(b - c)}{2} + \frac{a}{2c}(c^2 - x^2) &= \frac{a}{2c}[bc - c^2 + c^2 - x^2] \\ &= \frac{a}{2c}[bc - x^2]. \end{aligned}$$

Osservato ora che quest'area per le condizioni del problema deve essere equivalente a quella del triangolo MNC , avremo l'equazione :

$$\frac{ax^2}{2c} = [bc - x^2] \frac{a}{2c},$$

ossia :
$$x^2 = bc - x^2,$$

donde :
$$2x^2 = bc \text{ e } x = \sqrt{\frac{bc}{2}}.$$

Per costruire questo risultato basta trasformare l'egualianza $2x^2 = bc$ nella proporzione :

$$b : x :: x : \frac{c}{2},$$

lo che prova che la determinazione della retta CN si riduce alla ricerca di una media proporzionale fra la base BC del triangolo e la metà della parte CD della medesima compresa fra il vertice C e il piede dell'altezza.

L'abitudine insegnerà come si debba procedere in ogni problema speciale.



GEOMETRIA SOLIDA

§ 1.

Definizioni e prime conseguenze che da esse nascono.

Si chiama *piede*, di una linea retta sopra un piano il punto in cui la retta lo incontra.

Una retta è *perpendicolare* ad un piano quando è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo piede nel piano. In ogni altro caso è *obliqua*. °

Una retta e un piano son *paralleli* quando prolungati indefinitamente non s'incontrano mai.

Due rette nello spazio son *parallele* quando sono nel medesimo piano e inoltre non s'incontrano.

Due piani son *paralleli*, allorchè prolungati indefinitamente non si incontrano.

Teorema.

Per due rette che si incontrano si può far passare un piano, ma non se ne può far passare che un solo (fig. 160).

Sieno AB , AC le rette date che si incontrano in A . Si immagini di aver condotto un piano qualunque per la AB e lo si faccia ruotare attorno a questa retta finchè passi per un punto qualunque C della AC . In quest'ultima posizione la AC ha due punti A e C a comune col piano e vi giace perciò per intero. Così riman dimostrata la prima parte del teorema.

È poi evidente che seguitando la rotazione, il punto C e per conseguenza la AC , escono dal piano e che non vi possono più giacere se non che nella posizione indicata che perciò è unica.

COROLLARIO 1.° *Una retta ed un punto situato al di fuori della medesima determinano un piano.*

Condotta infatti pel punto dato una retta che tagli quella data queste due rette determinano un piano e non ne determinano che un solo.

COROLLARIO 2.° *Tre punti non situati in linea retta determinano un piano.*

Uniti questi tre punti due a due con linee rette, si rientra del tutto nel teorema principale.

COROLLARIO 3.° *Due rette parallele determinano un piano.*

Difatto, prima di tutto esse sono per definizione nel medesimo piano; inoltre tirata una retta che le tagli amendue, quest'ultima con una di quelle date determina l'unico piano nel quale possano stare le due parallele.

SCOLIO. In generale adunque due rette non son situate nel medesimo piano.

Teorema.

L'intersezione di due piani è una linea retta (fig. 161).

Sieno A e B due punti dell'intersezione dei piani dati; è prima di tutto chiaro che la retta AB si trova sopra amendue. Inoltre scelto un punto qualunque C del secondo piano al di fuori della AB , questo punto non potrà trovarsi sul primo, perchè allora i due piani avendo tre punti a comune non in linea retta si confonderebbero. Quindi la AB è l'unica intersezione dei piani dati.

§ 2.

Una retta è perpendicolare ad un piano, se è perpendicolare a due rette condotte pel suo piede nel piano. Tre rette perpendicolari in uno stesso punto ad una stessa retta, sono in uno stesso piano perpendicolare a questa. Per un punto dato si può condurre una sola perpendicolare ad un piano dato.

Teorema.

Una retta è perpendicolare ad un piano quando è perpendicolare a due rette che passano pel suo piede nel piano (fig. 162).

Sia la retta AB perpendicolare alle due rette BC , BD che passano pel suo piede B nel piano MN . Per dimostrare

il teorema basterà provare che la AB è perpendicolare a ogni altra retta BE condotta pel punto B nel medesimo piano. A quest'oggetto si tiri la retta CD che taglia le tre rette BC , BD , BE , si prendano sulla perpendicolare AB due punti A , F equidistanti dal piede B e si tirino AD , AC , AE , FC , FD , FE .

I triangoli ACD , FCD hanno il lato CD comune, il lato $AC = FC$ giacchè la retta BC è perpendicolare sul mezzo di AF e il lato $AD = FD$ per la stessa ragione; essi dunque sono eguali e l'angolo $ACD = FCD$. I triangoli ACE , FCE hanno allora il lato CE comune, $AC = FC$ e l'angolo compreso eguale per dimostrazione; perciò $AE = FE$ e il punto E è equidistante da A e F ed appartiene perciò alla perpendicolare sul mezzo di AF nel piano AFE . Dunque la retta BE è perpendicolare ad AF .

COROLLARIO 1.° *Tre rette perpendicolari in uno stesso punto ad una retta sono in un medesimo piano perpendicolare a questa retta.*

Siano BC , BD , BE le tre perpendicolari ad AB . Per due di queste rette, per esempio BC e BD , si faccia passare un piano MN , indi si faccia passare un piano per AB e BE . La retta AB perpendicolare a BC e BD è pel teorema dimostrato perpendicolare al piano MN e perciò a qualunque retta che passi pel suo piede in questo piano e fra le altre alla intersezione del piano ABE con MN . Questa intersezione non può dunque essere che BE , giacchè sappiamo, che in un piano, da un punto dato non può alzarsi che una perpendicolare ad una retta.

COROLLARIO 2.° *Si dimostrerebbe in modo identico che tutte le perpendicolari condotte pel punto B ad AB giacciono nel piano MN perpendicolare alla stessa AB .*

Teorema.

Per un punto dato si può condurre un piano perpendicolare ad una retta e non se ne può condurre che un solo (fig. 163).

Possono darsi due casi, cioè: 1.° il punto è sulla retta; 2.° è situato al di fuori.

1.° Sia O il punto dato sulla retta AB . Si elevino per questo punto e in due piani diversi le rette OC , OD perpendicolari ad AB . Il piano OCD è per ciò che abbiám dimostrato perpendicolare ad AB ed è il solo perchè contiene tutte le perpendicolari che posson tirarsi pel punto O ad AB .

2.° Sia O (fig. 164) il punto dato fuori della AB . Si abbassi dal medesimo OC perpendicolare ad AB nel piano OAB e pel punto C intersezione di AB e OC si conduca col metodo sopra indicato il piano MN perpendicolare ad AB . Questo piano conterrà la OC e perciò passerà per O e sarà quello richiesto. Esso è l'unico perchè qualunque altro perpendicolare ad AB non contiene la OC che è la sola perpendicolare abbassabile da O sulla retta data AB .

Teorema.

Per un punto dato si può condurre una perpendicolare ad un piano e non se ne può condurre che una.

Possono darsi due casi, cioè: che il punto sia sul piano; che sia invece fuori del piano.

1.° Sia O (fig. 165) il punto ed MN il piano dato. Si conduca per O una retta qualunque AB nel piano MN , indi si conduca il piano perpendicolare a questa retta CDE e nel medesimo si conduca OF perpendicolare alla sua intersezione col piano MN ; OF è la perpendicolare richiesta, giacchè essendo AB perpendicolare al piano CDE lo è alla OF che passa pel suo piede in quel piano e quest'ultima a sua volta risultando perpendicolare tanto ad AB come a CD che passano pel suo piede nel piano MN lo è anche a questo piano.

Ogni altra retta condotta per O essendo obliqua o a CD o ad AB non può essere perpendicolare al piano MN .

2.° Sia O (fig. 166) il punto e MN il piano dati. Si tiri nel piano una retta qualunque AB e si conduca quindi per O il piano OAC ad essa perpendicolare che intersecherà MN secondo la retta AC . Si conduca in questo piano OD perpendicolare ad AC che sarà la retta dimandata. Per provarlo si prolunghi OD di una lunghezza DE eguale a sè

stessa, indi si tirino OA , OB , DA , DB , CA , CB . I triangoli BAO , BAD che hanno gli angoli in A retti giacchè la AB è perpendicolare al piano OAC ed hanno inoltre il lato AB comune e $AO = AD$ essendo il punto A equidistante da O e D saranno eguali e perciò il lato $BO = BD$.

Quindi il triangolo BOD è isoscele e la retta BC che unisce il suo vertice al mezzo della base è perpendicolare a questa base. Ond'è che la retta OD risulta perpendicolare a due rette CA , CB che passano pel suo piede nel piano MN e perciò è perpendicolare a questo piano.

Ogni altra retta condotta dal punto O al piano MN è obliqua, come, ad esempio, la OB . Difatto nel triangolo OBC l'angolo C è retto e gli altri due sono acuti. Perciò la OB formando un angolo acuto con la BC che passa pel suo piede nel piano MN è obliqua a questo piano.

§ 3.



Se da un punto posto fuori di un piano si conducono a questa una perpendicolare e parecchie oblique: 1.° Le oblique equidistanti dal piede della perpendicolare sono eguali e viceversa; 2.° Le oblique più distanti dal piede della perpendicolare sono più lunghe e viceversa. Come si misuri la distanza da un punto a un piano.

Teorema.

Se da un punto esterno ad un piano si conducono sul medesimo la perpendicolare e varie oblique (fig. 167):

- 1.° *La perpendicolare è più corta di ogni obliqua;*
- 2.° *Due oblique che si allontanano egualmente dal piede della perpendicolare sono eguali e viceversa;*
- 3.° *Di due oblique disugualmente discoste dal piede della perpendicolare, quella che più se ne allontana è la maggiore e viceversa.*

1.° Sia la OC perpendicolare al piano MN ed OA un'obliqua qualunque. Nel triangolo OCA l'angolo C è retto e perciò l'ipotenusa OA è maggiore del cateto OC .

2.° Siano le oblique OA , OB che si discostano egualmente dal piede della perpendicolare OC . I triangoli ret-

tangoli OCB , OCA hanno il lato OC comune e l'altro cateto CA eguale a CB ; essi son dunque eguali e l'ipotenusa $OA = OB$.

Viceversa avendosi l'obliqua $OA = OB$ i triangoli rettangoli OAC , OBC avranno le ipotenuse eguali e il cateto $OA = OB$; essi dunque saranno eguali e sarà $BC = AC$, lo che prova che le due oblique eguali sono egualmente discoste dal piede della perpendicolare.

3.° Sia l'obliqua AD più lontana di OA dal piede della perpendicolare. Prendasi sulla CD una lunghezza $CE = CA$ e si tiri l'obliqua OE che pel n.° 2 sarà eguale ad OA . Ma nel piano OCD l'obliqua OD a CD è più discosta dal piede della perpendicolare e perciò più lunga della OE , e siccome $OE = OA$, così $OD > OA$.

Viceversa si supponga $OD > OA$. La obliqua OD non potrà discostarsi dal piede della perpendicolare tanto quanto la OA perchè allora la eguaglierebbe in lunghezza, non potrà discostarsene meno perchè in tal caso ne sarebbe più corta. Dovrà dunque allontanarsene di più.

SCOLIO. La perpendicolare essendo la retta più corta che possa condursi fra un punto ed un piano è stata scelta per misurarne la distanza.

§ 4.

Se pel piede di un'obliqua ad un piano si conduce in questo una perpendicolare alla proiezione dell'obliqua, questa perpendicolare è anche perpendicolare all'obliqua. L'angolo acuto che un'obliqua ad un piano fa colla sua proiezione su questo, è minore dell'angolo che l'obliqua fa con un'altra retta qualunque condotta pel suo piede nel piano. Come si misura l'inclinazione di una retta su di un piano.

Si chiama *proiezione* di un punto sopra di un piano il piede della perpendicolare abbassata da quel punto sul piano.

Proiezione di una retta sopra un piano è la retta che unisce le proiezioni di due dei suoi punti su quel piano.

Teorema.

Se pel piede di un' obliqua in un piano si conduce nel medesimo una perpendicolare alla proiezione dell' obliqua, essa sarà anche perpendicolare all' obliqua stessa (fig. 168).

Sia la retta AB obliqua al piano MN , sia BC la sua proiezione su quel piano e ED la perpendicolare a questa proiezione condotta pel piede B dell' obliqua. Si prendano sulla DE le distanze eguali BE , BD e si tirino AE , AD , CD , CE . La CB essendo perpendicolare sul mezzo di DE il punto C è situato ad egual distanza da D e da E , e perciò le oblique AD , AE che si discostano egualmente dal piede della perpendicolare sono eguali, e il triangolo ADE è isoscele. Ora noi sappiamo che nel triangolo isoscele la retta che va dal vertice al mezzo della base è perpendicolare a questa base; quindi la AB è perpendicolare a DE , come volevasi dimostrare.

COROLLARIO. *L'angolo acuto ABC fatto da un' obliqua AB colla sua proiezione BC è minore dell'angolo che la detta obliqua fa con un'altra retta qualunque tirata pel suo piede nel piano di proiezione.*

Sia BF un'altra retta tirata nel piano MN e diversa da BC . Presa sulla stessa la lunghezza $BF = BC$ e tirata AF quest' ultima come obliqua sarà più lunga della perpendicolare AC . Quindi i triangoli ABC , ABF avranno il lato AB comune, $BC = BF$ per costruzione e il terzo lato $AF > AC$. Perciò l'angolo ABF opposto ad AF sarà maggiore dell'angolo ABC opposto ad AC .

L'angolo fatto da un' obliqua colla sua proiezione, essendo il minore fra tutti quelli che l' obliqua fa con tutte le rette che passano pel suo piede nel piano di proiezione, è stato scelto per misurare l' inclinazione dell' obliqua sul medesimo piano.

§ 5.

Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni retta ad essa parallela è anche perpendicolare allo stesso piano; e viceversa due rette perpendicolari ad uno stesso piano sono parallele. Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro. Una retta posta fuori di un piano, parallela ad una retta condotta nel piano, è anche parallela al piano. Due piani perpendicolari ad una stessa retta sono paralleli.

Teorema.

Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni retta ad essa parallela è perpendicolare allo stesso piano e viceversa due perpendicolari allo stesso piano sono parallele (fig. 169).

1.° Sia la retta CD perpendicolare al piano MN e sia AB una retta ad essa parallela. Uniti i piedi B, D delle due rette è prima di tutto chiaro che nel piano $ABDC$, essendo CD perpendicolare a BD anche AB lo sarà pure.

Ciò posto si conduca dal punto B ad un punto qualunque E della CD la retta BE , indi nel piano MN si tiri FG perpendicolare a BD ; per un cognito teorema FG sarà anche perpendicolare a BE , donde ne segue che la retta FG perpendicolare a due rette BD, BE che passano pel suo piede nel piano $ABDE$ è perpendicolare a questo piano ed in conseguenza lo è anche alla AB . Infine la AB a sua volta essendo perpendicolare a due rette FG, BD condotte pel suo piede B nel piano MN è perpendicolare a questo piano, che è ciò che si voleva provare.

2.° Viceversa siano AB e CD perpendicolari al piano MN . Se pel piede D di una di esse si immagina condotta la parallela ad AB essa pella prima parte del teorema risulterà perpendicolare ad piano. Ma da un punto qualunque non può condursi che una sola perpendicolare ad un piano, perciò la CD e la parallela ad AB tirata pel punto D non fanno che una sola linea retta.

COROLLARIO. *Due parallele ad una terza son parallele fra loro* (fig. 170).

Se le rette A, B sono amendue parallele alla retta C , si conduca un piano perpendicolare alla retta C e sia MN

questo piano. Per la prima parte del teorema tanto la retta A che la retta B dovranno risultare perpendicolari ad MN ; per la seconda parte invece le due rette A, B , perpendicolari allo stesso piano risultano parallele.

Teorema.

Una retta posta fuori di un piano parallela ad una retta condotta nel piano, è parallela al piano stesso (fig. 171).

Sia AB parallela alla retta CD condotta nel piano MN . Il piano $ABCD$ condotto per le due parallele intersecando MN secondo la CD , ove la AB incontrasse il piano MN , non potrebbe farlo che in un punto della CD e ciò per ipotesi non sussiste.

Problema.

Due piani perpendicolari ad una retta son paralleli.

Essi non possono incontrarsi perchè da uno qualunque dei loro punti d'incontro si potrebbero tirare due piani perpendicolari alla stessa retta e ciò sappiamo non potere essere.

§ 6.

Le intersezioni di un piano con due piani paralleli sono parallele. Le parti di rette parallele comprese fra due piani paralleli sono eguali. Due piani paralleli hanno le perpendicolari comuni e sono dappertutto equidistanti. Le parti di più rette comprese fra vari piani paralleli sono proporzionali fra loro.

Teorema.

Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano sono parallele (fig. 172).

Sieno AB, CD le intersezioni dei due piani paralleli MN, PQ col terzo piano RS . Queste rette stando in piani paralleli non possono incontrarsi; di più si trovano ambedue nel piano RS e sono perciò parallele.

COROLLARIO 1.° *Le parti di due rette parallele comprese fra due piani paralleli sono eguali.*

Sieno AC , BD le porzioni di due rette parallele comprese fra i piani paralleli MN , PQ . Fatto passare un piano $ABCD$ per le medesime esso taglierà i piani MN , PQ secondo le rette AB , CD parallele fra loro. La figura $ABCD$ sarà dunque un parallelogrammo e avremo perciò $AC = BD$.

COROLLARIO 2.° *Due piani paralleli hanno le perpendicolari comuni e sono equidistanti dappertutto.*

Essendo OG una perpendicolare al piano MN essa dovrà esserlo anche al suo parallelo PQ , giacchè sappiamo che da un punto qualunque G di una retta non può condursi che un solo piano perpendicolare alla medesima.

La perpendicolare comune a due piani serve a misurare la loro distanza. Tutte queste perpendicolari son poi eguali in lunghezza come parallele comprese fra piani paralleli.

Teorema.

Le parti di più rette comprese fra piani paralleli sono proporzionali fra loro (fig. 173).

Sieno AC , DF due rette qualunque che tagliano i piani paralleli MN , PQ , RS la prima in A , B , C la seconda in D , E , F . Tirata DC si facciano passare per AC e CD il piano ACD , per CD e DF il piano CDF . Le intersezioni AD , BG del piano ACD coi due piani MN , PQ essendo parallele nel triangolo ACD tagliato dalla parallela BG al lato AD , avremo la proporzione:

$$AB : BC :: DG : GC.$$

Per una consimil ragione nel piano CDF si avrà:

$$DE : EF :: DG : GC.$$

Dal paragone delle due proporzioni risulta:

$$AB : BC :: DE : EF.$$

SCOLIO. La data dimostrazione si applica ad un numero qualunque di rette intercette fra un numero qualunque di piani paralleli.

§ 7.

La minima distanza fra due rette non situate in uno stesso piano è la loro perpendicolare comune. Che cosa s'intende per angolo di due rette che non sono poste nello stesso piano. Due angoli posti in piani diversi che hanno i lati paralleli e diretti nello stesso verso ed in verso contrario sono eguali ed i loro piani sono paralleli.

Teorema. ¹

La minima distanza fra due rette non situate nello stesso piano, è la loro perpendicolare comune (fig. 174).

Sieno AB , CD le rette date. Per un punto qualunque C di quest'ultima si conduca la retta CE parallela ad AB e si faccia poscia passare un piano MN per AB e CE . Indi per le rette AB , CD si conducano i piani $ABLG$, $CDSR$ perpendicolari al piano MN . Questi piani si taglieranno secondo una retta HO che sarà perpendicolare al piano MN e perciò alla retta CD e alla GL parallela ad AB condotta pel suo piede in quel piano. Ond'è che questa intersezione è perpendicolare comune a CD ed AB .

Essa è unica ed ogni altra retta TU che va dalla CD alla AB è un'obliqua imperocchè non essendo contenuta nel piano $CDSR$ è obliqua al piano MN e non può perciò esser perpendicolare alla retta CD e alla parallela ad AB condotta per il punto U , rette amendue che passano pel suo piede nel piano MN .

La TU è più lunga di HO . Difatto condotta dal punto T la perpendicolare TH al piano MN essa sarà compresa nel piano $ABLG$ e risulterà eguale ad HO . Ma TU obliqua è più lunga di TH , dunque ad egual ragione si ha $TU > HO$.

¹ La dimostrazione di questo teorema esige la conoscenza di parecchie proposizioni contenute nel § 9. Noi l'abbiamo esposta qui per conformarsi all'ordine adottato nel Programma, ma gli studiosi saranno obbligati ad ometterla fino all'esposizione completa dei §§ 8 e 9.

Teorema.

Due angoli situati in piani diversi e aventi i lati paralleli sono eguali o supplementarii e i loro piani sono paralleli (fig. 175).

Siano gli angoli ABC , DEF che hanno i lati paralleli e rivolti nello stesso verso. Si prendano sui lati paralleli le lunghezze qualunque $BA = ED$, $BC = EF$ e si tirino le rette AC , DF , AD , BE , CF . I quadrilateri $ABED$, $BCFE$ che hanno i lati opposti eguali e paralleli sono parallelogrammi e perciò AD , BE , CF son parallele e si ha $AD = BE = CF$. Da ciò risulta che anche il quadrilatero $ACFD$ è pure parallelogrammo e che AC è eguale e parallela a DF . I triangoli ABC , DEF hanno adunque i tre lati eguali e l'angolo ABC è perciò eguale a DEF .

Si dimostrerebbe in modo analogo che due angoli a lati paralleli e volti in senso contrario son pure eguali mentre invece i due angoli riescono supplementarii quando due lati paralleli hanno la stessa direzione e due altri direzione contraria.

Per provare che i piani ABC , DEF son paralleli basta osservare che le rette parallele AD , BE , CF comprese fra i medesimi sono eguali, lo che non potrebbe avvenire qualora questi piani si incontrassero.

SCOLIO. Due rette poste in un modo qualunque nello spazio non formano a rigore nessun angolo, ma per convenzione si chiama *angolo di due rette* quello che formano le parallele tirate a queste linee per un punto qualunque dello spazio.

§ 8.

Il rapporto di due angoli diedri è uguale a quello degli angoli piani fatti da rette condotte nelle loro faccie perpendicolarmente ai loro spigoli. Come si misurino i diedri. Le proprietà degli angoli piani fatti da rette che si tagliano convengono anche a diedri fatti da piani che si incontrano.

Si chiama *angolo diedro* (fig. 176) la figura formata da due piani che si tagliano e terminano alla comune intersezione. Questa retta BC è la sua *costola* o *spigolo*; i

piani ABC , DBC che formano questo angolo ne sono le *faccie*.

Si indica un angolo diedro con le lettere della sua costola ovvero con quattro lettere ponendo quelle della costola nel mezzo. E perciò l'angolo della figura si indicherà indifferentemente con BC , oppure $ABCD$.

Due angoli diedri sono *adiacenti* quando hanno la medesima costola, una faccia comune e son situati dalle due parti di questa faccia.

Quando due angoli diedri adiacenti sono eguali diconsi *retti*, e i piani che li formano son *perpendicolari* fra loro. Altrimenti i piani sono *obliqui*.

Due angoli diedri sono *opposti al vertice* quando le faccie dell'uno sono in prolungamento di quelle dell'altro.

Teorema.

Se da due punti qualunque della costola di un diedro, si conducono nelle faccie dell'angolo delle perpendicolari alla comune intersezione, gli angoli così formati sono eguali fra loro (fig. 177).

Sia $ABCD$ l'angolo diedro avente per costola BC . Dai punti B ed E scelti a piacere su questa costola si siano condotte le rette BA , BD , FE , EG perpendicolari a BC e situate rispettivamente nei piani ABC , BCD . La AB sarà parallela ad FE e la BD ad EG . E perciò i due angoli ABD , FEG avendo i lati paralleli e rivolti nello stesso verso saranno eguali.

SCOLIO. L'angolo costante ABD i di cui lati son perpendicolari alla costola BC , chiamasi *angolo piano* corrispondente all'angolo diedro $ABCD$.

Teorema.

Se gli angoli piani corrispondenti a due angoli diedri sono eguali, anche questi diedri sono eguali fra loro (fig. 178).

Siano AB , $A'B'$ due angoli diedri i cui angoli piani corrispondenti CAD , $C'A'D'$ sono eguali fra loro. Si sovrappongano i due angoli piani eguali applicando il lato $A'C'$

sopra AC e $A'D'$ sopra AD . La costola $A'B'$ perpendicolare al piano $A'C'D'$ per esserlo alle due rette $A'C'$, $A'D'$ prenderà la direzione della BA perpendicolare al piano CAD . Quindi i piani BAC , $B'A'C'$ che hanno due rette convergenti a comune coincideranno, e la stessa riflessione potrà farsi per i piani BAD , $B'A'D'$. Quindi i due diedri sovrapponendosi l'uno all'altro saranno eguali.

COROLLARIO. *Se l'angolo piano corrispondente ad un angolo diedro è retto, anche il diedro è pure retto (fig. 179).*

Sieno AB , CD due piani che si tagliano secondo la retta DM . Da un punto qualunque di questa intersezione condotte le perpendicolari GF , GL nei piani AB , CD avremo in LGF l'angolo piano che misura il diedro DM . Ora se LGF è retto e perciò eguaglia il suo adiacente LGE i diedri $CMD B$ e $CMD A$ corrispondenti saranno pure eguali pel dimostrato teorema. Ma questi diedri sono adiacenti, e perciò sono retti amendue.

Teorema.

Il rapporto di due angoli diedri eguaglia quello degli angoli piani ad essi corrispondenti (fig. 180).

Sieno $ABCD$, $A'B'C'D'$ due angoli diedri ed ABD , $A'B'D'$ gli angoli piani ad essi corrispondenti.

Suppongasì dapprima che questi angoli piani abbiano una misura comune che entri, per esempio, 5 volte nel primo e 3 nel secondo, avremo prima di tutto:

$$ABD : A'B'D' :: 5 : 3.$$

Si divida il diedro $ABCD$ in cinque diedri eguali conducendo diversi piani pella sua costola e per le rette BE , BF , BG , BH che dividono l'angolo piano ABD in parti eguali. Lo stesso si effettui nel diedro $A'B'C'D'$ che risulterà diviso in tre diedri pure eguali fra loro ed eguali a quelli in cui fu diviso $ABCD$. Avremo allora che:

$$ABCD : A'B'C'D' :: 5 : 3.$$

Il paragone di questa proporzione con quella già stabilita conduce al risultato:

$$ABCD : A'B'C'D' :: ABD : A'B'D'.$$

Qualora i due angoli piani ABD , $A'B'D'$ fossero incommensurabili fra di loro si ripeterebbe un ragionamento già esposto più volte nella Geometria piana per dei casi consimili.

COROLLARIO 1.° *Se nella proporzione di sopra stabilita si pone al tempo stesso $A'B'C'D' = 1$ e $A'B'D' = 1$, vale a dire se si prende per unità di misura dei diedri l'angolo diedro al quale corrisponde un angolo piano unità di misura, ottiensi $ABCD = ABD$. E perciò si dice che l'angolo diedro è misurato dall'angolo piano corrispondente. Ciò significa che espresse in numeri le due quantità hanno il medesimo valore.*

SCOLIO. Si prende generalmente per unità di misura dei diedri il diedro retto al quale sappiamo che corrisponde un angolo piano retto.

COROLLARIO 2.° *Da quello che abbiain detto ne viene che gli angoli diedri fatti da piani che si tagliano godranno delle stesse proprietà di cui godono i loro angoli piani.*

E perciò:

- 1.° Due diedri adiacenti saranno supplementarii e viceversa;
- 2.° Due diedri opposti al vertice saranno eguali;
- 3.° Quando due piani paralleli son tagliati da un terzo, gli otto angoli formati sono eguali o supplementarii;
- 4.° Due diedri le cui faccie son rispettivamente parallele sono eguali o supplementarii.

§ 9.

Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano condotto per essa è perpendicolare al piano stesso. Se due piani sono perpendicolari fra loro, ogni retta condotta in uno di essi perpendicolarmente alla loro intersezione è perpendicolare all'altro e viceversa, ogni perpendicolare ad uno di essi tirata per un punto della loro intersezione è tutta nell'altro. L'intersezione di due piani perpendicolari ad un terzo è perpendicolare a questo. Gli angoli fatti da due rette perpendicolari a due piani sono rispettivamente eguali agli angoli che misurano i diedri compresi fra i due piani.

Teorema.

Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano condotto per la medesima è perpendicolare al piano stesso (fig. 181).

Sia AB la retta ed MN il piano dato. Sia poi CD un piano qualunque che passa per la AB e che interseca MN secondo la retta CE . Condotta BN perpendicolare a CE nel piano MN l'angolo diedro dei due piani è misurato dall'angolo piano ABN . Ma quest'ultimo è retto, giacchè la AB per ipotesi è perpendicolare al piano MN , dunque è retto anche il diedro.

Teorema.

Se due piani son perpendicolari fra loro, ogni retta condotta in uno di essi perpendicolarmente alla loro intersezione è perpendicolare all'altro e viceversa ogni perpendicolare ad uno di essi tirata per un punto della loro intersezione è tutta nell'altro (fig. 182).

1.° Siano AB , CD due piani perpendicolari fra loro che si intersecano secondo la retta CE e sia FG una perpendicolare a CE condotta nel piano ECD . Si tiri FL pure perpendicolare a CE ma nel piano AB ; l'angolo GFL sarà retto perchè misura il diedro retto dei due piani. Dunque la FG sarà perpendicolare a due rette CE , FL che passano pel suo piede nel piano AB e lo sarà così a questo piano.

Viceversa la perpendicolare innalzata dal punto F sul piano AB deve coincidere colla FG tirata nel piano CED perpendicolarmente a CE e ciò perchè da un punto di un piano non può elevarsi che una perpendicolare al medesimo.

Teorema.

Se due piani son perpendicolari ad un terzo, la loro intersezione è perpendicolare a questo terzo piano (fig. 183).

Sieno $ABCD$, $CFED$ due piani perpendicolari al piano MN e intersecantisi secondo la retta CD . Se dal punto C si immagina condotta la perpendicolare al piano MN questa per il precedente teorema dovrà trovarsi al tempo stesso tanto nel piano $ABCD$, come in quello $CFED$; deve dunque essere la loro comune intersezione.

Teorema.

Se si hanno due rette perpendicolari a due piani, il loro angolo è eguale o supplementare al diedro formato da questi piani (fig. 184).

Sia $ABCD$ l'angolo diedro e FOG l'angolo formato dalle due perpendicolari OF , OG ai piani ABC , BCD . Fatto passare un piano per FO ed OG questo sarà perpendicolare alle due faccie dell'angolo diedro e perciò alla loro comune intersezione BC . Se questo piano interseca i piani ABC , BCD , secondo le rette AB , BD queste due rette saranno perpendicolari alla BC e l'angolo piano ABD rappresenterà la misura del diedro dato. Ciò posto nel quadrilatero $FOBG$ gli angoli in F e G sono retti; occorre dunque che gli altri due angoli O o B sieno supplementarii.

Se invece dell'angolo FOG si considera il suo adiacente FOM questo risulterà per conseguenza eguale all'angolo ABD . E così riman comprovato del tutto il teorema in questione.

§ 10.

In ogni angolo solido uno qualunque dei suoi angoli piani è minore della somma di tutti gli altri. In ogni angolo solido convesso la somma degli angoli piani è minore di quattro retti.

Si chiama *angolo solido* o *angolo poliedro* la figura formata da diversi piani che passano per un medesimo punto e son terminati alla loro intersezione. I piani in questione son le

faccie dell'angolo, le loro intersezioni ne son le *costole*, il punto per cui passano tutte le faccie è il vertice dell'angolo. Si sogliono spesso indicare col nome di *faccie* anche gli angoli piani formati da due costole consecutive.

Un angolo solido è *convesso* quando prolungata una qualunque delle sue faccie, questo prolungamento lascia l'angolo tutto da una parte; in caso diverso è *rientrante*.

Gli angoli solidi si distinguono dal numero delle loro faccie; si chiama *triedro* quello che ne ha tre, *tetraedro* quello di quattro, *pentaedro* se ne ha cinque, *esaedro* di sei, ec.

Teorema.

In ogni angolo triedro un angolo piano qualunque è minore della somma degli altri due (fig. 185).

Sia $SABC$ l'angolo triedro. Se l'angolo ASB è il più grande fra i suoi tre angoli piani basterà dimostrare il teorema per quest'angolo, onde a più forte ragione resulti vero per gli altri due.

Ciò posto si faccia nell'angolo maggiore ASB l'angolo BSD eguale a BSC , si tiri in seguito una retta AB che tagli le tre rette SA , SD , SB e presa la lunghezza $SC = SD$ si faccia passare un piano per la retta AB e il punto C . I triangoli BSD , BSC che hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali sono eguali e perciò il lato $BC = BD$ e per conseguenza:

$$AD = AB - BD = AB - BC.$$

Ma nel triangolo ABC il lato AC supera la differenza degli altri due, quindi $AC > AD$. Da ciò ne viene che i due triangoli ASD , ASC avendo due lati eguali e il terzo disuguale avranno l'angolo maggiore opposto al lato maggiore, talchè sarà:

$$ASD < ASC.$$

Aggiungendo $BSD = BSC$ ai due membri della disuguaglianza, ne risulta:

$$ASD + BSD < ASC + BSC,$$

ossia:

$$ASB < ASC + BSC,$$

come volevasi provare.

Teorema.

In un angolo solido un angolo piano qualunque è minore della somma di tutti gli altri (fig. 186).

Sia $SAB CDE$ l'angolo solido. Condotti per la costola SA e per le altre due SC , SD che non le sono adiacenti due piani, questi formeranno nell'angolo solido tre angoli triedri cioè $SABC$, $SACD$, $SADE$. Pel teorema precedente in ognuno di essi avremo le disuguaglianze:

$$ASB < ASC + BSC,$$

$$ASC < ASD + CSD,$$

$$ASD < ASE + DSE.$$

Sommandole membro a membro e semplificando risulta:

$$ASB < BSC + CSD + DSE + ASE,$$

come si voleva dimostrare. L'angolo ASB essendo stato scelto a piacere fra quelli delle faccie dell'angolo solido la dimostrazione è generale.

Teorema.

In ogni angolo solido convesso la somma degli angoli piani è minore di quattro retti (fig. 187).

Sia $SAB CDE$ l'angolo solido dato. Lo si chiuda con un piano che determinerà colle sue faccie un poligono convesso $ACBDE$, indi si unisca un punto O situato entro il medesimo coi vertici del poligono. Formeremo nel piano $ABCDE$ cinque triangoli ed altrettanti in tutte le faccie dell'angolo solido prese insieme. La somma degli angoli fatti nel piano del poligono sarà perciò eguale alla somma degli angoli presi nei triangoli delle faccie. Ora considerando i triedri formati in A , B , C , D , E si noterà che gli angoli EAB , ABC , ec., resultano minori ciascuno della somma degli angoli SAB e SAE oppure SBA e SBC , ec., o in altri termini che gli angoli del contorno del poligono sono inferiori in somma a quelli alla base dei triangoli SAB , SBC , ec. A motivo adunque dell'eguaglianza più sopra accennata e

onde siavi compenso occorre che la somma degli angoli in O superi quella degli angoli in S . Ma la prima somma è di quattro retti, dunque la seconda le è inferiore.

§ 11.

Due triedri sono eguali: 1.° Quando hanno un diedro eguale compreso tra faccie rispettivamente eguali e similmente disposte; 2.° Quando hanno una faccia eguale adiacente a due diedri rispettivamente eguali e similmente disposti; 3.° Quando hanno le tre faccie rispettivamente eguali e similmente disposte; 4.° Quando hanno i tre diedri rispettivamente eguali e similmente disposti.

Teorema.

Due triedri che hanno un angolo diedro eguale compreso fra faccie eguali e similmente disposte sono eguali (fig. 188).

Sieno $SABC$, $S'A'B'C'$ i due triedri che hanno il diedro $SB = S'B'$ la faccia $ASB = A'S'B'$ e $BSC = B'S'C'$. Si sovrappongano i due angoli piani eguali ASB , $A'S'B'$; allora per l'eguaglianza dei diedri SB , $S'B'$ il piano BSC prenderà la direzione $C'S'B'$ e siccome i due angoli BSC , $B'S'C'$ sono eguali e le due costole SB , $S'B'$ si son sovrapposte le altre due SC , $S'C'$ dovranno pure coincidere. E così i due triedri sovrapponendosi esattamente saranno eguali.

SCOLIO. Dall'eguaglianza dei triedri ne risulta quella dei loro diedri opposti a faccie eguali e viceversa.

Teorema.

Due triedri che hanno una faccia eguale adiacente a due diedri rispettivamente eguali e similmente disposti sono eguali (fig. 189).

Sieno $SABC$, $S'A'B'C'$ i due triedri che hanno la faccia BSA eguale a $B'S'A'$ e i diedri $SA = S'A'$, $SB = S'B'$. Portato il primo triedro sul secondo per modo che le faccie eguali si sovrappongano, attesa l'eguaglianza dei diedri summentovati il piano ASC si sovrapporrà ad $A'S'C'$ e BSC a $B'S'C'$. E siccome due piani si intersecano secondo una sola linea retta la costola SC cadrà sopra $S'C'$. E così i due triedri sovrammettendosi esattamente saranno eguali.

Teorema.

Due triedri che hanno le tre faccie eguali e similmente disposte sono eguali (fig. 189).

Sieno $SABC$, $S'A'B'C'$ i due triedri che hanno le faccie $ASB = A'S'B'$; $ASC = A'S'C'$ e $BSC = B'S'C'$. Il teorema sarebbe evidente qualora fosse dimostrata l'eguaglianza di due diedri corrispondenti, come ad esempio SA , $S'A'$ perchè allora si rientrerebbe in uno dei casi contemplati. E ciò appunto ci proponiamo di provare. A quest'effetto scelto un punto A a piacere sulla costola SA si conducano nei piani ASB , ASC le perpendicolari AB , AC alla medesima e si tiri BC , l'angolo piano CAB sarà la misura del diedro SA . Presa poscia sulla costola $S'A'$ la lunghezza $S'A' = SA$ si ripeta in A' sul secondo triedro un'identica costruzione. I triangoli rettangoli SAB , $S'A'B'$ che hanno il lato SA eguale ad $S'A'$ e l'angolo $ASB = A'S'B'$ saranno eguali e perciò $SB = S'B'$ e $AB = A'B'$. Per una consimil ragione saranno eguali gli altri due triangoli rettangoli SAC , $S'A'C'$ e daranno $SC = S'C'$, $AC = A'C'$. Quindi i triangoli BCS , $S'B'C'$ che hanno due lati e l'angolo compreso eguale saranno pure eguali e così $BC = B'C'$. Infine i triangoli ABC , $A'B'C'$ avendo i tre lati eguali saranno eguali e l'angolo $CAB = C'A'B'$. Ma questi due ultimi angoli misurano rispettivamente i diedri SA , $S'A'$, dunque questi diedri sono eguali.

Teorema.

Se da un punto interno ad un triedro si abbassano tre perpendicolari sulle sue faccie il nuovo triedro così formato ha le faccie supplementarii dei diedri del primitivo e viceversa (fig. 190).

Sia $SABC$ il triedro dato e $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ le perpendicolari sulle sue faccie. La prima parte del teorema essendo già stata dimostrata al § 9 resta a provare la seconda. Perciò si osservi che la retta $S'C'$ essendo perpendicolare al piano ASB , il piano $B'S'C'$ che passa per la medesima sarà pure perpendicolare ad ASB , similmente il piano $B'S'C'$

come passante per la $S'B'$ sarà perpendicolare a ASC e così i due piani ASB , ASC perpendicolari al terzo $B'S'C'$ si intersecheranno secondo una retta SA perpendicolare a questo terzo piano. Si dimostrerà egualmente che SB è perpendicolare al piano $A'S'C'$ e SC al piano $A'S'B'$. E così il triedro S avendo le costole perpendicolari alle faccie del triedro S' avrà i suoi angoli piani supplementarii agli angoli diedri di quest'ultimo.

Scolio. I due angoli triedri $SABC$, $S'A'B'C'$ diconsi *supplementarii* l'uno dell'altro.

Teorema.

Due triedri che hanno i tre diedri rispettivamente eguali e similmente disposti, sono eguali.

Si indicano con S, S' i due triedri e siano T, T' due altri ad essi supplementarii. I diedri degli angoli S, S' essendo due a due eguali, i loro supplementi e perciò le faccie dei triedri T, T' lo saranno pure. Ond'è che questi ultimi saranno eguali ed avranno perciò anche i loro diedri due a due eguali. E perciò infine le faccie di S ed S' essendo supplementi di questi diedri resulteranno esse pure eguali e così i triedri S, S' per un teorema già dimostrato resulteranno eguali.

§ 12.

Solidi poliedri. Definizioni e prime conseguenze che ne derivano.

Si chiama *poliedro* un corpo terminato in ogni senso da superfici piane. I poligoni formati dalle intersezioni di questi piani sono le *faccie* del poliedro e il loro insieme ne costituisce la superficie.

Si chiamano *angoli* del poliedro gli angoli formati nei punti di concorso delle faccie; *vertici* questi stessi punti, *costole* o *spigoli* i lati delle faccie; *diagonali* le rette che uniscono due vertici non situati sulla medesima faccia.

I poliedri si distinguono specialmente dal numero delle faccie e perciò diconsi *tetraedro*, *pentaedro*, *esaedro*, ec., *dodecaedro*, *icosaedro* secondochè hanno quattro, cinque, sei, ec., dodici, venti faccie.

Volume di un poliedro è la grandezza dello spazio che occupa.

Due poliedri dello stesso volume sono equivalenti. Essi sono invece eguali quando portati uno sull'altro possono farsi coincidere.

Il *prisma* è un solido che ha due faccie eguali e parallele dette basi e tutte le altre faccie parallelogramme. La sua *altezza* è la distanza fra i piani delle basi parallele.

Un prisma è triangolare, quadrangolare, pentagono, ec., secondochè la sua base è un triangolo, un quadrilatero, ec.

Il prisma è *retto* quando i piani delle sue faccie parallelogramme son perpendicolari a quelli delle basi, altrimenti è *obliquo*.

Tagliando un prisma con un piano non parallelo a quello delle basi lo si decompone in due *tronchi di prisma*.

Quando le basi del prisma sono parallelogrammi il prisma prende il nome di *parallelepipedo*. Se inoltre sono rettangole il parallelepipedo è rettangolo. Se infine tanto le basi come le faccie laterali sono quadrati si ottiene il *cubo*.

Si chiama *piramide* un poliedro del quale una faccia è un poligono qualunque e tutte le altre sono triangoli aventi per base i lati della faccia poligona e per vertice il medesimo punto.

La faccia poligona chiamasi *base* e il vertice comune delle faccie triangolari è il *vertice* della piramide. Altezza di una piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base.

Una piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagona*, ec., secondochè la sua base è un triangolo, un quadrilatero, ec.

Tagliando una piramide con un piano qualsiasi la si decompone in una piccola piramide e in un *tronco di piramide*.

Un poliedro è *regolare* quando i suoi angoli sono eguali e le faccie sono poligoni regolari eguali. Così, per esempio, il cubo è l'esaedro regolare.

Una piramide è regolare allorchè ha per base un poligono regolare e la sua altezza cade nel centro di questo poligono.

§ 13.

Due prismi sono eguali: 1.° Se hanno un angolo solido eguale compreso fra faccie rispettivamente eguali e similmente disposte; 2.° Se hanno una base ed una faccia laterale rispettivamente eguali, egualmente inclinate fra loro e similmente disposte. Ogni sezione fatta in un prisma da un piano parallelo alle basi è un poligono eguale alle basi.

Teorema.

Due prismi sono eguali (fig. 191).

1.° *Se hanno un angolo solido eguale compreso fra faccie rispettivamente eguali e similmente disposte;*

2.° *Se hanno una base ed una faccia laterale rispettivamente eguali, egualmente inclinate e similmente disposte.*

1.° Sieno AH , $A'H'$ i due prismi che hanno gli angoli solidi A , A' eguali e le faccie comprese eguali, cioè:

$$ABCDE = A'B'C'D'E', \quad AELF = A'E'L'F'$$

e

$$ABGF = A'B'G'F'.$$

Si sovrappongano i due solidi per modo che i poligoni eguali $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ coincidano; per l'eguaglianza degli angoli solidi A , A' la faccia piana $A'F'L'E'$ si applicherà sul piano $AFL E$ e siccome i parallelogrammi $EAF L$, $E'A'F'L'$ hanno già un lato comune e sono eguali coincideranno in tutta la loro estensione e il lato $F'L'$ cadrà sopra LF . Per una ragione identica il parallelogrammo $A'B'G'F'$ cade sopra $ABGF$ e il lato $F'G'$ in FG . Quindi le basi superiori dei poliedri avendo due lati a comune ed essendo eguali come eguali alle basi inferiori coincideranno in tutti i loro lati e vertici. E perciò i prismi sovrapponendosi esattamente saranno eguali.

2.° Abbiamo i prismi AH , $A'H'$, le basi $ABCDE = A'B'C'D'E'$, la faccia $AELF = A'E'L'F'$ e l'angolo diedro $AE = A'E'$. I due triedri A , A' saranno eguali come aventi un diedro eguale compreso fra angoli piani rispettivamente eguali e perciò l'angolo piano $FAB = F'A'B'$. Ond'è che i parallelogrammi $ABGF$, $A'B'G'F'$ sono eguali perchè aventi due lati adiacenti e l'angolo compreso eguale. E così si rientra del tutto nel caso precedente.

Teorema.

La sezione fatta in un prisma da un piano parallelo alle basi è un poligono eguale ai poligoni basi (fig. 192).

Sia $FGHLM$ la sezione fatta da un piano parallelo alle basi nel prisma AC' . Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo essendo parallele, le rette FG , GH , HL , ec., saranno parallele rispettivamente a AB , BC , ec., talchè i quadrilateri EMF , $ABGF$, ec., risultano parallelogrammi e perciò $FG = AB$, $GH = BC$, ec. Inoltre l'angolo $FGH = ABC$, $MFG = EAB$, ec., come formati da rette parallele e rivolte nello stesso verso. Talchè il poligono $FGHLM$ ha i lati e gli angoli eguali a quelli della base del prisma e gli è perciò perfettamente eguale.

§ 14.

In ogni parallelepipedo le faccie opposte sono eguali e parallele, i diedri opposti sono eguali, e le quattro diagonali si tagliano scambievolmente nello stesso punto per metà. Un parallelepipedo è determinato quando si conoscono le lunghezze e le direzioni di tre spigoli contigui. Nel parallelepipedo rettangolo le diagonali sono eguali ed il quadrato di ognuna di esse è eguale alla somma dei quadrati dei tre spigoli contigui. Rapporto fra la diagonale e il lato del cubo.

Teorema.

Le faccie opposte ed i diedri opposti di un parallelepipedo sono eguali fra loro (fig. 193).

1.° Sia il parallelepipedo AG nel quale prima di tutto le basi sono eguali per definizione. Si considerino altre due

faccie opposte prese a piacere come, ad esempio, $ABFE$, $CDHG$. Esse hanno il lato $AB = CD$ e $AE = DH$ come rispettivamente lati opposti di un parallelogrammo ed inoltre l'angolo compreso $EAB = HDC$ come formati da lati paralleli rivolti nello stesso verso. Queste faccie sono dunque eguali.

2.° Gli angoli diedri opposti come AD , FG sono eguali come fatti da piani paralleli e rivolti in senso opposto.

SCOLIO. Il parallelepipedo è determinato quando si conosce la lunghezza e direzione dei suoi tre spigoli.

Difatto in tal caso è facile costruire le sue faccie giacchè in ciascuna di esse si conoscono due lati e l'angolo compreso.

Teorema.

Le quattro diagonali di un parallelepipedo si tagliano per metà in un medesimo punto (fig. 193).

Siano nel parallelepipedo AG due diagonali le rette AG , BH che si tagliano in un punto O . Questo punto è alla metà di amendue perchè la figura $HGBA$ è un parallelogrammo come avente due lati opposti AB , GH eguali e paralleli. Considerata poscia una terza diagonale CE questa insieme con la AG forma le due diagonali dell'altro parallelogrammo $ACGE$ e perciò va a tagliarla alla sua metà in O . Lo stesso dicasi per la quarta diagonale DF .

SCOLIO. Il punto O , nel quale le quattro diagonali si intersecano dicesi *centro* del parallelepipedo.

COROLLARIO. Se il parallelepipedo è rettangolo le figure $ACGE$, $ABGH$ sono rettangoli eguali e perciò anche le loro diagonali sono eguali. Dunque *nel parallelepipedo rettangolo, le diagonali sono eguali.*

Teorema.

In un parallelepipedo rettangolo il quadrato della diagonale eguaglia la somma dei quadrati dei suoi tre spigoli (fig. 194).

Nel parallelepipedo AG sia BH una diagonale qualunque. Tirata BD nel triangolo rettangolo BDH avremo:

$$\overline{BH}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DH}^2.$$

Ma il triangolo BDC essendo anche rettangolo si ha pure:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2,$$

e perciò sostituito questo valore in quello di BH :

$$\overline{BH}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{DH}^2,$$

come volevasi provare.

COROLLARIO 1.° *Se il parallelepipedo dato è un cubo:*

$$AB = BC = DH,$$

e perciò:

$$\overline{BH}^2 = 3 \overline{BA}^2,$$

il che prova che nel cubo il quadrato della diagonale eguaglia il triplo quadrato del suo lato.

COROLLARIO 2.° *Detta D la diagonale e L il lato di un cubo, si ha:*

$$D^2 = 3 L^2,$$

donde:

$$D = L \sqrt{3}$$

e ciò mostra che la diagonale e il lato di un cubo sono due quantità incommensurabili fra di loro.

SCOLIO. La formula $D^2 = 3 L^2$ serve a trovare approssimativamente una delle quantità L , D quando l'altra sia cognita.

ESEMPIO. Abbiasi un cubo avente per lato 2^m, la sua diagonale sarà data da:

$$D^2 = 3 \times 4 = 12 \text{ e } D = \sqrt{12},$$

e fatti i calcoli:

$$D = 3^m, 46 \text{ a meno di un centimetro.}$$

Se la diagonale di un cubo fosse 3^m il suo lato sarà dato da:

$$L^2 = \frac{9}{3} = 3 \text{ e } L = \sqrt{3} = 1^m, 72 \text{ circa.}$$

§ 15.

Due piramidi sono eguali: 1.° Se hanno un angolo triedro eguale formato da faccie rispettivamente eguali e similmente disposte; 2.° Se hanno la base ed una faccia rispettivamente eguale, egualmente inclinate tra loro e similmente disposte. Se una piramide viene tagliata da un piano parallelo alla base: 1.° La sezione è un poligono simile alla base; 2.° La piccola piramide recisa è simile all'intera; 3.° L'altezza e gli spigoli laterali sono tagliati in parti proporzionali.

Teorema.

Due piramidi sono eguali:

1.° *Se hanno un angolo triedro eguale compreso fra faccie rispettivamente eguali e similmente disposte (fig. 195);*

2.° *Se hanno la base ed una faccia rispettivamente eguali, egualmente inclinate fra loro e similmente disposte.*

1.° Sieno $SABCD$, $S'A'B'C'D'$ le due piramidi che hanno l'angolo triedro $A = A'$, la faccia $ABCD = A'B'C'D'$, $ASD = A'S'D'$ ed $ABS = A'B'S'$. Si trasporti il secondo solido sul primo per modo che le faccie eguali $ABCD$, $A'B'C'D'$ coincidano; attesa l'eguaglianza dei triedri A , A' la faccia piana $A'B'S'$ cadrà sul piano ABS e siccome questi due triangoli sono eguali, trovandosi nel medesimo piano e avendo un lato a comune coincideranno del tutto e così il punto S' cadrà in S . Perciò le due piramidi avendo egual base e lo stesso vertice si sovrapporranno esattamente e saranno eguali.

2.° Sieno eguali le basi delle due piramidi e le faccie SAB , $S'A'B'$ insieme coll'angolo diedro AB . La sovrapposizione delle due piramidi fatta come precedentemente, conduce in modo identico alla dimostrazione di questa parte del teorema.

Due poliedri son simili quando hanno le faccie simili una ad una e gli angoli solidi formati da faccie simili eguali.

Due vertici, due spigoli, due angoli diedri e solidi che corrispondono nei due poliedri diconsi *omologhi*.

Teorema.

Quando si taglia una piramide con un piano parallelo alla base:

- 1.° La sezione fatta è un poligono simile a quella base;*
- 2.° Gli spigoli e l'altezza son tagliati in parti proporzionali;*
- 3.° La piccola piramide recisa è simile all'intera (fig. 196).*

1.° Sia $SABCD$ la piramide tagliata dal piano $abcd$. I piani della base e della sezione essendo paralleli, le loro intersezioni con ciascheduna delle faccie laterali della piramide son rette parallele. Gli angoli ABC e abc , BCD e bcd , ec., son dunque formati da lati paralleli volti nello stesso verso e perciò sono eguali.

Inoltre dal parallelismo di AB con ab , BC con bc , ec., si deduce:

$$AB : ab :: SB : Sb,$$

$$BC : bc :: SB : Sb,$$

e perciò:

$$AB : ab :: BC : bc.$$

Quindi i due poligoni $ABCD$, $abcd$ avendo angoli eguali e lati omologhi proporzionali son simili.

2.° Condotto pel punto S un piano parallelo alla base della piramide, tanto gli spigoli come l'altezza saran divisi dal piano della sezione in parti proporzionali come convergenti comprese fra piani paralleli.

3.° La similitudine delle basi della intiera e della piccola piramide fu già dimostrata. Quella di due faccie triangolari omologhe come SAB , Sab resulta dall'essere equiangole. Gli angoli triedri omologhi come A , a sono eguali come aventi i tre angoli piani eguali. E perciò la piramide recisa è simile all'intera.

COROLLARIO. La sezione $abcd$ essendo simile alla base della piramide le aree di queste due son proporzionali ai quadrati dei lati omologhi e perciò:

$$abcd : ABCD :: \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Ma noi abbiám dimostrato che:

$$ab : AB :: So : \overline{So},$$

dunque: $abcd : ABCD :: \overline{So} : \overline{SO}.$

E perciò:

Le sezioni fatte in una piramide da piani paralleli son proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice.

§ 16.

In due poliedri simili: 1.° Gli spigoli omologhi son proporzionali fra loro; 2.° Le faccie omologhe e le superfici totali stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi.

Teorema.

Nei poliedri simili:

- 1.° *Gli spigoli omologhi son proporzionali fra loro;*
- 2.° *Le faccie omologhe stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi;*
- 3.° *Le superfici totali stanno anche fra loro come i quadrati dei detti spigoli.*

1.° È prima di tutto evidente che i lati omologhi di due faccie omologhe dei poliedri simili son proporzionali poichè queste faccie son poligoni simili. Inoltre il lato comune a due faccie adiacenti di un poliedro P è omologo al lato comune alle due faccie adiacenti A', B' del secondo poliedro rispettivamente omologhe ad A e B , per conseguenza il rapporto di similitudine di due faccie omologhe A, A' è lo stesso di quello delle altre due B, B' e in altri termini le costole omologhe dei due poliedri sono proporzionali.

2.° Due faccie omologhe essendo simili stanno fra loro come i quadrati dei loro lati. Ora il rapporto di due spigoli omologhi essendo costante si può anche dire che le superfici delle due faccie sien proporzionali ai quadrati di questi spigoli.

3.° Sieno $S, S', S'',$ ec., le superfici delle diverse faccie del primo poliedro, $s, s', s'',$ ec., quelle corrispondenti del secondo ed A, A' due spigoli omologhi. Pel n.° 2, avremo:

$$\frac{S}{s} = \frac{S'}{s'} =, \text{ ec., } = \frac{A^2}{A'^2},$$

donde :

$$\frac{S + S' + S'', \text{ ec.,}}{s + s' + s'', \text{ ec.,}} = \frac{A^2}{A'^2},$$

come si voleva provare.

§ 17.

Due piramidi sono simili: 1.° Se hanno un angolo triedro eguale compreso fra faccie rispettivamente simili, egualmente inclinate fra loro e similmente disposte; 2.° Se hanno la base ed una faccia rispettivamente simili egualmente inclinate fra loro e similmente disposte. Due poliedri simili si possono scomporre in uno stesso numero di piramidi simili e similmente disposte.

Teorema.

Due piramidi triangolari che hanno un triedro eguale, compreso fra tre faccie simili una ad una e similmente disposte sono simili (fig. 197).

Sieno $SABC, S'A'B'C'$ due piramidi triangolari che hanno gli angoli triedri B, B' eguali e le cui faccie BAC, SAB, SBC son rispettivamente simili alle faccie $B'A'C', S'A'B', S'B'C'$. Si prenda sulla costola BA una lunghezza Ba eguale a $B'A'$, indi si conduca pel punto a il piano acs parallelo alla faccia ACS . Questo piano determina per un cognito teorema, una piramide $Basc$ simile alla piramide $BASC$. Ora si osservi che le due piramidi $Basc, B'A'S'C'$ sono eguali come aventi il triedro $B = B'$ per ipotesi, e le faccie Bac eguale ad $B'A'C'$ come avente il lato $Ba = A'B'$ e gli angoli in B, B', a, A' rispettivamente eguali per la supposta similitudine dei triangoli $ABC, A'B'C'$; la faccia $Bas = B'A'S'$ per identica ragione e $Bsc = B'C'S'$ di conseguenza. Dunque se la piramide $Basc$ è simile a $BASC$ ed eguale a $B'A'S'C'$ anche quest' ultima sarà simile ad ABC .

Teorema.

Due piramidi triangolari che hanno un angolo diedro eguale compreso fra due faccie simili e similmente disposte, sono simili.

Sieno $SABC$, $S'A'B'C'$ (fig. 197) le due piramidi che hanno i diedri AB , $A'B'$ eguali, e le faccie SAB , ABC rispettivamente simili a $S'A'B'$, $A'B'C'$.

Gli angoli triedri B , B' avendo un diedro eguale compreso fra angoli piani eguali e similmente disposti saranno eguali. Di più il triangolo SAB essendo simile ad $S'A'B'$ ed ABC ad $A'B'C'$ si hanno le proporzioni:

$$AB : A'B' :: SB : S'B',$$

$$AB : A'B' :: BC : B'C',$$

da cui:

$$SB : S'B' :: BC : B'C',$$

e perciò i triangoli SBC , $S'B'C'$ son simili come aventi un angolo eguale compreso fra lati proporzionali. Quindi le due piramidi avendo un triedro eguale compreso fra faccie simili, sono simili.

Teorema.

Due piramidi qualunque son simili:

1.° *Se hanno un triedro eguale compreso fra faccie rispettivamente simili e similmente disposte;*

2.° *Se hanno la base ed una faccia laterale simili egualmente inclinate e similmente disposte (fig. 198).*

1.° Sieno nelle due piramidi $SABCDE$, $S'A'B'C'D'E'$ il triedro $A = A'$ e le faccie $ABCDE$, ABS , AES rispettivamente simili ad $A'B'C'D'E'$, $A'B'S'$, $A'E'S'$. Scomposte le basi simili in triangoli simili e similmente disposti e condotti i piani SAD , SAC , $S'A'D'$, $S'A'C'$, le due piramidi sono scomposte ciascuna in tre piramidi triangolari. La piramide SAD è simile ad $S'A'D'$ perchè la base AED è simile ad $A'E'D'$, SAE ad $S'A'E'$ per ipotesi e il diedro AE è eguale ad $A'E'$ come diedri corrispondenti in triedri eguali; da ciò ne viene la similitudine delle faccie SED , $S'E'D'$, e la eguaglianza dei triedri E , E' , non che dei diedri AD , $A'D'$, e la

similitudine delle faccie SAD , $S'A'D'$. Le altre due piramidi triangolari $SADC$, $S'A'D'C'$, avendo dunque anch'esse un diedro eguale compreso fra due faccie simili, saran simili e lo stesso si dimostrerà in simil guisa per le altre due piramidi $SABC$, $S'A'B'C'$. Tutte queste similitudini stabiliscono la similitudine delle faccie omologhe e l'eguaglianza dei triedri omologhi delle piramidi date. Infine gli angoli solidi S , S' , avendo angoli diedri e piani rispettivamente eguali, saranno eguali.

E così le piramidi avendo angoli solidi eguali e faccie omologhe simili, saranno simili.

2.° Sia la base $ABCDE$ simile alla base $A'B'C'D'E'$, la faccia triangolare SAB simile ad $S'A'B'$ e il diedro $AB = A'B'$. L'angolo triedro A sarà eguale al triedro A' come aventi due faccie e il diedro compreso eguali. Di più la similitudine delle faccie SAB , $S'A'B'$, dà:

$$SA : S'A' :: AB : A'B',$$

e quella delle basi delle piramidi:

$$AE : A'E' :: AB : A'B';$$

dalle quali proporzioni si deduce l'altra:

$$AE : A'E' :: SA : S'A',$$

che mostra che i triangoli SAE , $S'A'E'$ sono simili come aventi un angolo eguale compreso fra lati proporzionali.

Le due piramidi adunque avendo un triedro eguale compreso fra tre faccie simili e similmente disposte son simili, come fu precedentemente dimostrato.

Teorema.

Due poliedri simili si possono decomporre in uno stesso numero di piramidi simili e similmente disposte (fig. 199).

Siano $ABCD$, $CDEF$ due faccie contigue del poliedro P e $A'B'C'D'$, $C'D'E'F'$ le loro omologhe nel poliedro P' . Scelto un punto O a piacere nell'interno del primo poliedro e unite coi diversi suoi vertici si decomporrà il solido in tante piramidi quante sono le sue faccie. Quindi condotto per la retta $A'B'$ il piano $A'B'O'$ che faccia con $A'B'C'D'$ un angolo

diedro $A'B' = AB$ si costruisca in questo piano il triangolo $A'B'O'$ simile ad ABO e poscia si unisca il punto O' con tutti i vertici del secondo poliedro che verrà pure così decomposto in tante piramidi quante sono le sue faccie, e perciò eguali in numero a quelle in cui fu suddiviso il primo poliedro. Rimane ora a provare che queste piramidi son simili due a due. Si osserverà perciò prima di tutto che le piramidi $OABCD$, $O'A'B'C'D'$ lo sono difatto come aventi la base ed una faccia laterale simile, egualmente inclinate e similmente disposte. Da ciò ne segue che la faccia triangolare OCD è simile ad $O'C'D'$ e che i diedri CD , $C'D'$ sono eguali. E perciò saranno anche simili le altre due piramidi $OCD EF$, $O'C'D'E'F'$. E così si dimostrerà per tutte le altre in modo perfettamente analogo.

§ 18.

La superficie laterale di un prisma è eguale al prodotto del perimetro di una sezione perpendicolare agli spigoli laterali per la loro lunghezza comune. La superficie laterale di una piramide regolare è eguale al prodotto del perimetro della sua base per la metà del suo apotema. La superficie laterale di un tronco di piramide regolare a basi parallele è eguale al prodotto della semi-somma dei perimetri delle sue basi pel suo apotema, ovvero al prodotto dell' apotema per il perimetro della sezione equidistante dalle basi.

Teorema.

La superficie laterale di un prisma è eguale al prodotto del perimetro di una sezione perpendicolare agli spigoli laterali per la loro lunghezza comune (fig. 200).

Sia AH il prisma e $MNOPQ$ la sua sezione retta che naturalmente ha i suoi lati MN , NO , ec., perpendicolari agli spigoli del prisma. Le faccie laterali di questo solido essendo parallelogrammi avranno per misura rispettiva:

$$\begin{array}{l} \text{faccia } ABGF \dots\dots AF \times MN, \\ \text{• } BCHG \dots\dots BG \times NO, \\ \text{• } CDIH \dots\dots CH \times OP, \\ \text{• } DELI \dots\dots DI \times PQ, \\ \text{• } EAF L \dots\dots EL \times QM, \end{array}$$

ed osservando che gli spigoli AF , BG , CH , ec., son tutti della stessa lunghezza, la superficie laterale del prisma che eguaglia la somma di tutte le faccie parallelogramme verrà data da:

$$AF [MN + NO + OP + PQ + QM],$$

come si voleva dimostrare.

Teorema.

La superficie laterale di una piramide regolare ha per misura il prodotto del perimetro della sua base per la metà del suo apotema (fig. 201).

L'apotema di una piramide regolare è la perpendicolare abbassata dal suo vertice sopra un lato qualunque della base.

Sia O il centro del poligono base della piramide, la retta SO è l'altezza ed SA , SB , SC , SD son le costole della piramide tutte eguali fra loro come oblique che si discostano egualmente dal piede della perpendicolare. Dunque i triangoli isosceli SAB , SBC , SCD , ec., sono eguali fra loro e le loro misure vengono date da:

$$SAB \dots\dots\dots \frac{AB \times SF}{2},$$

$$SBC \dots\dots\dots \frac{BC \times SF}{2},$$

$$SCD \dots\dots\dots \frac{CD \times SF}{2},$$

$$SDA \dots\dots\dots \frac{DA \times SF}{2},$$

e perciò la superficie laterale è:

$$\frac{SF}{2} [AB + BC + CD + DA].$$

COROLLARIO. *Le superfici laterali di due piramidi regolari di equal base son proporzionali ai loro apotemi e viceversa.*

Ciò è evidente.

Teorema.

La superficie laterale di un tronco di piramide a basi parallele ha per misura il prodotto del suo apotema per la semi-somma dei perimetri delle sue basi, ovvero per quello di una sezione equidistante dalle basi (fig. 202).

Sia $AB C D E F G H$ il tronco di piramide regolare. Le sue faccie essendo trapezi, la superficie laterale si misurerà per la somma delle superfici di questi stessi trapezi che hanno tutti un'altezza eguale MN che è l'apotema del tronco. Ora le misure di questi trapezi sono:

$$A B G F \dots\dots\dots \frac{MN}{2} [A B + F G],$$

$$B C H G \dots\dots\dots \frac{MN}{2} [B C + G H],$$

$$C D H E \dots\dots\dots \frac{MN}{2} [C D + H E],$$

$$A D E F \dots\dots\dots \frac{MN}{2} [A D + E F],$$

e perciò la superficie laterale è data da:

$$\frac{MN}{2} [(A B + B C + C D + A D) + (F G + G H + H E + E F)],$$

il che prova la prima parte del teorema.

A dimostrare la seconda basta evidentemente far vedere che la retta parallela alle basi di uno qualunque dei trapezi ed equidistante da queste basi è eguale alla loro semi-somma. Sia ST una di queste rette. Tirata FS e prolungata fino ad incontrare la AD in U i triangoli FST , FUA son simili e perciò il rapporto di ST ad AU eguaglia quello di FT ad FA . Ma quest'ultimo è di 1 a 2, dunque ST è la metà di AU che a sua volta eguaglia la somma delle basi parallele AD , EF del trapezio.

§ 19.

Due parallelepipedi di egual base ed altezza sono equivalenti. Un parallelepipedo qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo della stessa altezza e di base equivalente.

Teorema.

Due parallelepipedi di egual base ed altezza sono equivalenti.

Sovrapposti i due parallelepipedi (*fig. 203*) per la base comune $ABCD$ si supponga prima di tutto che due delle loro faccie laterali si trovino sul medesimo piano, cioè la faccia $CBEH$ con $CBLP$ e $ADFG$ con $ADNM$. Allora le loro basi superiori saranno sul medesimo piano e avranno i lati LP , MN in prolungamento di EH e FG . Ciò premesso si considerino i due prismi triangolari $AGMLBH$ e $DFNP EC$. Questi solidi avranno la base CEP eguale a BLH perchè aventi i tre lati eguali, la faccia laterale $CDEF$ eguale a $ABHG$ come opposte di un parallelepipedo e il diedro $CD = AB$ come angoli fatti da piani paralleli. Essi prismi son dunque eguali. Ora se dall'intero solido $ABCPNGH$ si toglie or l'uno, or l'altro di questi prismi, i residui che sono appunto i parallelepipedi dati, saranno equivalenti e ciò appunto volevamo provare.

Siano poscia due parallelepipedi (*fig. 204*) AF , AN sovrapposti per la base eguale, ma del resto in posizione qualsiasi uno rapporto all'altro. Le loro basi superiori trovandosi nello stesso piano si prolunghino i lati EF , HG dell'una fino ad incontrare quelli PL , MN dell'altra. La figura $UTSR$ così costruita sarà un parallelogrammo eguale agli altri due $EFGH$, $LMNP$ e perciò eguale ad $ABCD$. E perciò su questo parallelogrammo e sopra $ABCD$ si potrà costruire un terzo parallelepipedo eguale in base ed altezza ai due primitivi. Ora questo parallelepipedo si trova rapporto a quelli dati nelle condizioni del caso già contemplato ed è perciò ad essi equivalente. Ond'è che i parallelepipedi AF , AN amendue equivalenti ad un terzo saranno equivalenti fra loro.

Teorema.

Un parallelepipedo qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo della stessa altezza e di base equivalente (fig. 205).

Se si ha un parallelepipedo qualunque si può sempre convertirlo in parallelepipedo retto della stessa base ed altezza e perciò ad esso equivalente. Resta adunque a vedere come il parallelepipedo retto possa a sua volta trasformarsi in rettangolo.

Sia adunque il parallelepipedo retto AG che ha per base il parallelogrammo $ABCD$. Sul lato AB di questa base si costruisca il rettangolo $ABML$ ad essa equivalente e quindi su questo rettangolo si elevi il parallelepipedo rettangolo AN di eguale altezza e base equivalente con quello dato. La retta AL misurerà la distanza dal piano $ABFE$ a quello $CDHG$. Ora essendo indifferente la scelta della base di un parallelepipedo si può prendere tanto per quello AG come per AN a base la faccia comune $ABFE$, la loro altezza sarà per amendue AL . Ond'è che i due solidi avendo egual base ed altezza saranno equivalenti per un teorema già dimostrato.

§ 20.

Due parallelepipedi rettangoli della stessa base stanno fra loro come le loro altezze. Due parallelepipedi rettangoli della stessa altezza stanno fra loro come le loro basi. Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.

Teorema.

Due parallelepipedi rettangoli della stessa base stanno fra loro come le rispettive altezze (fig. 206).

Siano AG , AN due parallelepipedi sovrapposti per la base comune e amendue rettangoli. Si supponga dapprima che le loro altezze AE , AL abbiano una comune misura che entri, per esempio, 2 volte in AL e 4 in AE . Per i punti di divisione Q , L , R determinati da questa misura

comune si conducano dei piani paralleli a quello della base $ABCD$; questi piani determinano nel parallelepipedo AG delle sezioni che sono eguali ad $ABCD$. Il parallelepipedo AG è dunque diviso in 4 parallelepipedi eguali ed AN in 2. Perciò il rapporto dei due solidi è di 4 a 2 e per conseguenza eguaglia quello delle loro altezze.

Se le altezze AE , AL fossero incommensurabili si ripeterebbe il ragionamento impiegato più volte in geometria piana per dei casi consimili.

Teorema.

Due parallelepipedi rettangoli della stessa altezza stanno fra loro come le basi.

Si indichino con P , P' due parallelepipedi rettangoli della stessa altezza h , e le cui basi rispettive R , R' hanno per dimensioni una a , b , l'altra a' , b' . Si costruisca un terzo parallelepipedo P'' sui tre spigoli a , b' , h e lo si paragoni col parallelepipedo P . Questi due solidi hanno una faccia eguale di dimensioni a , h e che si può scegliere a base; saranno dunque proporzionali alle altezze e si avrà:

$$P : P'' :: b : b'.$$

I parallelepipedi P'' , P' hanno pure una faccia eguale di dimensioni b' , h e perciò si avrà:

$$P'' : P' :: a : a'.$$

Moltiplicando le due proporzioni termine a termine e riducendo si ottiene:

$$P : P' :: a \times b : a' \times b'.$$

Ora i rettangoli R , R' hanno per misure rispettive $a \times b$, $a' \times b'$, dunque l'ultima proporzione diventa:

$$P : P' :: R : R',$$

e ciò volevamo dimostrare.

Teorema.

Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le altezze.

Si indichino con P , P' due parallelepipedi rettangoli di base R , R' e altezze h , h' . Si costruisca un terzo parallelepipedo P'' di base R e altezza h' indi lo si paragoni tanto al parallelepipedo P come all'altro P' . I due solidi P , P'' di egual base saran proporzionali alle altezze e perciò:

$$P : P'' :: h : h'.$$

I solidi P'' , P' avendo eguale altezza, saran proporzionali alle basi e perciò:

$$P'' : P' :: R : R'.$$

Moltiplicando le due proporzioni termine a termine e riducendo si ottiene:

$$P : P' :: R \times h : R' \times h'.$$

COROLLARIO. Se a , b indicano le dimensioni del rettangolo R , ed a' , b' quelle del rettangolo R' la proporzione sopra trovata può cambiarsi nell'altra:

$$P : P' :: a \times b \times h : a' \times b' \times h',$$

il che prova come due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro tre dimensioni.

§ 21.

Il volume di un parallelepipedo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Teorema.

Il volume di un parallelepipedo è eguale al prodotto della sua base per l'altezza.

1.° Sia P un parallelepipedo rettangolo di base R e altezza h . Si scelga per unità di volume il cubo che ha per base il quadrato unità di superficie e per altezza l'unità

lineare eguale al lato del quadrato base. Il paragone del parallelepipedo con questo cubo darà la proporzione :

$$P : 1 :: R \times h : 1 \times 1 \times 1,$$

donde : $P = R \times h.$

2.° Se il parallelepipedo dato è obliquo qualsiasi si potrà sempre convertirlo in parallelepipedo rettangolo di eguale altezza e di base equivalente, e perciò il teorema dimostrato è sempre esatto.

SOLIO. L'eguaglianza $P = R \times h$ vuol esser intesa nel suo vero senso. Essa non significa nè può significare che un volume è eguale al prodotto di una superficie per una linea, ma invece vuol dire che espressi in numeri tanto il volume, come il prodotto, hanno lo stesso valore.

COROLLARIO 1.° Sieno a, b le dimensioni del rettangolo R ; avremo :

$$R = a \times b,$$

e perciò : $P = a \times b \times h.$

Dunque il volume del parallelepipedo rettangolo eguaglia il prodotto delle sue tre dimensioni.

ESEMPIO. Sia un parallelepipedo rettangolo lungo 3^m, 5, largo 0^m, 80, alto 2^m, 25; avremo:

$$P = 3,5 \times 0,80 \times 2,25,$$

e fatti i calcoli : $P = \text{metri cubi } 6,300.$

COROLLARIO 2.° Se $a = b = h$, si ottiene $P = a^3.$

E perciò :

Il volume di un cubo eguaglia la terza potenza del suo lato.

§ 22.

Ogni prisma triangolare è metà di un parallelepipedo della stessa altezza e di base doppia. Il volume di un prisma è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Teorema.

Ogni prisma obliquo è equivalente ad un prisma retto avente per altezza lo spigolo del prisma e per base la sua sezione retta (fig. 207).

Sia AK un prisma obliquo le cui basi sono i poligoni $ABCDE$, $FGHIK$; si conducano per le estremità A , F dello spigolo AF dei piani perpendicolari al medesimo e siano $AB'C'D'E'$, $FG'H'I'K'$ le sezioni rette eguali fatte da questi piani nel prisma. Il solido AK' sarà il prisma retto che si vuol dimostrare essere equivalente a quello dato ed obliquo AK . Per questo si comincia dal dimostrare l'egualianza dei due poliedri $ABCDEB'C'D'E'$, $FGHIK'G'H'I'K'$. Si sovrappongano a quest'oggetto le faccie eguali $AB'C'D'E'$, $FG'H'I'K'$, le costole BB' , GG' rispettivamente perpendicolari a queste faccie hanno la stessa lunghezza data da $AF - BG'$, e perciò il punto B cade in G . Lo stesso dimostrasi per i punti C , H e così per gli altri vertici dei poliedri scelti due a due. Ora se dal solido totale AI si toglie or l'uno or l'altro dei due poliedri dimostrati eguali i residui resulteranno equivalenti, e siccome questi due residui sono i prismi in quistione l'enunciato teorema riman dimostrato in tutta la sua generalità.

Teorema.

Ogni prisma triangolare è metà di un parallelepipedo di egual altezza e base doppia (fig. 208).

Sia $ABCDEF$ un prisma triangolare e AH il parallelepipedo costruito colla stessa altezza del prisma e con base parallelogramma $ABGC$ doppia del triangolo ABC . Si conduca il piano $MNPL$ perpendicolare alle costole laterali del prisma; indi si osservi che il prisma obliquo $ABCDEF$

è equivalente al prisma retto che avesse per base il triangolo LPN e per altezza lo spigolo CF . In simil guisa l'altro prisma triangolare obliquo $BCGEFH$ è equivalente ad un prisma retto avente per base il triangolo LMN e la stessa altezza del primo CF . Ora siccome i triangoli LMN , LPN sono eguali quali metà dello stesso parallelogrammo, ne viene che i due prismi saranno equivalenti, e perciò il parallelepipedo AH , che ne è la somma, resulterà il doppio di uno di essi. E viceversa il prisma sarà la metà del parallelepipedo.

COROLLARIO. *Il parallelepipedo misurandosi dal prodotto della base per l'altezza, il prisma avrà la metà di questa misura, ossia avrà un volume eguale all'altezza moltiplicata per la metà della base del parallelepipedo, o infine in altri termini espresso dal prodotto del triangolo base per la sua altezza.*

Teorema.

Il volume di un prisma qualsiasi eguaglia il prodotto della sua base per la sua altezza (fig. 209).

Dato il prisma poligonale AI , lo si decomponga in prismi triangolari, conducendo dei piani per la costola AF e per le altre parallele CH , DI che non si trovano sulla medesima faccia. Le misure di questi prismi triangolari, indicando con A la loro altezza comune, saranno date rispettivamente da:

$$ABC \times A,$$

$$ACD \times A,$$

$$AED \times A,$$

e perciò il prisma poligono verrà misurato da:

$$A [ABC + ACD + AED] = A \times ABCDE,$$

come volevasi provare.

COROLLARIO 1.° *Due prismi di base equivalente son proporzionali alle loro altezze, e viceversa due prismi di equal altezza stanno fra loro come le basi.*

Ciò riesce evidente dopo il teorema dimostrato.

COROLLARIO 2.° *Due prismi sono equivalenti se le loro basi sono inversamente proporzionali alle altezze.*

Dette B, B' , le basi A, A' le altezze, V, V' i volumi dei due solidi, avremo $V = AB, V' = A'B$. Ora per ipotesi.

$$A : B' :: A' : B,$$

e perciò:

$$AB = A'B',$$

ossia:

$$V = V',$$

§ 23.

In due piramidi di basi equivalenti e di eguale altezza le sezioni fatte da piani paralleli alle basi e equidistanti da queste, sono equivalenti. Due piramidi triangolari di basi equivalenti e della medesima altezza sono equivalenti.

Teorema.

Se due piramidi hanno basi equivalenti e eguale altezza le sezioni fatte da piani paralleli alle basi e equidistanti da queste, sono equivalenti.

Sia B la superficie delle basi, A l'altezza comune delle due piramidi e a la distanza dal vertice del piano di sezione. Si indichino poi con S, S' le superfici delle due sezioni fatte nelle piramidi. Per un teorema cognito noi avremo le proporzioni.

$$B : S :: A^3 : a^3,$$

$$B : S' :: A^3 : a'^3,$$

e perciò:

$$S = \frac{a^3 B}{A^3}, S' = \frac{a'^3 B}{A^3}$$

ossia:

$$S = S'.$$

Teorema.

Due piramidi triangolari della medesima altezza e di base equivalente, sono equivalenti (fig. 210).

Siano $SABC, S'A'B'C'$ due piramidi triangolari aventi le basi $ABC, A'B'C'$ equivalenti e che si suppongono poste sul medesimo piano e di più della medesima altezza.

Supponiamo, se è possibile, che esse non sieno equivalenti e che $SABC$ sia la maggiore; si rappresenti la loro differenza di volume con un prisma avente per base il triangolo ABC e un'altezza AE . Si divida l'altezza delle piramidi in parti eguali più piccole di AE e per i punti di divisione si conducano dei piani paralleli a quelli delle basi; ognuno di questi piani determina nelle due piramidi delle sezioni equivalenti. Si conduca in seguito per il lato BC della base della piramide maggiore un piano parallelo allo spigolo SA fino all'incontro del piano della sezione superiore $F'GH'$; questi piani insieme colle faccie del triedro A costituiranno un prisma triangolare in parte esterno alla piramide. Ripetuta una identica costruzione per le altre sezioni si formeranno tanti prismi in parte esterni quante sono le parti in cui fu divisa l'altezza e la loro somma supererà la piramide $SABC$.

Nella seconda piramide si costruisca invece al di sotto di ogni sezione dei prismi interni conducendo per le rette $G'H'$, $M'N'$ dei piani paralleli alla costola $S'A'$. Si formeranno tanti prismi quante sono le divisioni dell'altezza meno una e la loro somma sarà minore in volume della piramide $S'A'B'C'$. Ond'è che la differenza fra la somma dei prismi esterni e quella dei prismi interni sarà superiore alla differenza fra le due piramidi, ossia al prisma $ABCE$. Ora il primo prisma interno è equivalente al secondo esterno come avente eguale altezza e basi equivalenti, il secondo interno lo è al terzo esterno e così di seguito per quanti ve ne fossero. Perciò la differenza delle due somme di prismi eguaglia il prisma $ABCB'F'$ costruito sulla base inferiore e questo prisma dovrebbe esser maggiore di quello $ABCE$ che ha la medesima base e altezza maggiore. Ciò essendo assurdo è pure assurda l'ipotesi da cui siam partiti che una delle piramidi superi l'altra in volume. Esse dunque sono equivalenti.

§ 24.

Ogni piramide triangolare è il terzo di un prisma di egual base ed altezza. Il volume di una piramide è uguale al prodotto della sua base pel terzo della sua altezza. Il volume di un poliedro si determina scomponendolo in piramidi.

Teorema.

Ogni piramide triangolare è il terzo di un prisma di egual base ed altezza (fig. 211).

Sia la piramide triangolare $SABC$ e sia $ABCESD$ il prisma di egual base ed altezza avente cioè le costole laterali parallele a una di quelle BS della piramide. Si vuol provare che la piramide è il terzo del prisma.

Difatti il prisma si può considerare come composto della piramide triangolare $SABC$ e di quella quadrangolare $SAD EC$. Ora condotto il piano SAE si divide la piramide quadrangolare in due triangolari $SAED$, $SACE$ che sono equivalenti perchè aventi basi equivalenti sul medesimo piano e lo stesso vertice S , vale a dire identica altezza. Considerate poscia e paragonate le piramidi $SABC$, $SAD E$ e scelta a base della prima ABC e della seconda DES , si vedrà che queste piramidi son pure equivalenti come aventi la stessa altezza del prisma e base equivalente. Ond' è che in definitiva il prisma consta di tre piramidi equivalenti ad $SABC$ e perciò viceversa la piramide data è il terzo del prisma.

COROLLARIO 1.° *Il volume di una piramide è eguale al prodotto della sua base pel terzo dell' altezza.*

Se la piramide è triangolare come $SABC$, costruito il prisma di egual base ed altezza, avremo pel volume di questo prisma:

$$ABC \times SO.$$

Pel teorema dimostrato la piramide essendone il terzo, sarà misurata da:

$$ABC \times \frac{SO}{3}.$$

Se la piramide è poligona come (fig. 212) $SABCDE$, decomposta in piramidi triangolari mediante piani condotti per una costola SA e per le diagonali AC , AD del poligono base, tutte queste piramidi avranno la medesima altezza e perciò i loro volumi saranno dati da:

$$ABC \times \frac{SO}{3}, \quad ACD \times \frac{SO}{3}, \quad AED \times \frac{SO}{3},$$

e perciò il suo volume totale da:

$$\frac{SO}{3} [ABC + ACD + AED],$$

ossia:
$$\frac{SO}{3} \times ABCDE.$$

COROLLARIO 2.° *Per misurare il volume di un poliedro qualunque si può decomporlo in piramidi aventi per basi le faccie del poliedro e per vertice comune un punto qualunque preso nell'interno del medesimo. Calcolati i volumi di ciascuna piramide e fattane la somma si avrà il volume totale del poliedro.*

§ 25.

Il volume di un tronco di piramide a basi parallele è eguale al prodotto del terzo della sua altezza per la somma delle sue basi e di una media proporzionale fra le medesime.

Teorema.

Un tronco di piramide a basi parallele è equivalente alla somma di tre piramidi aventi per altezza comune quella del tronco e per basi rispettive la base inferiore del tronco, la base superiore e una media proporzionale fra queste due basi (fig. 213).

1.° Si consideri dapprima un tronco di piramide triangolare e sia $ABCDEF$ il tronco dato. Condotti i piani ECF , ECA lo si decomporrà in tre piramidi triangolari, cioè $EABC$, $ECD F$, $ECAF$. La prima ha per base quella inferiore del tronco ABC e la sua medesima altezza. La seconda può considerarsi come avente per base il triangolo DEF , base superiore del tronco e per vertice il punto C e così ha

pure l'altezza del tronco. Quanto alla terza si trasformi in una piramide $GACF$ della stessa base ACF e di eguale altezza, giacchè il punto G si prende sulla retta EG parallela ad AF e perciò al piano ACF . Dopo questa trasformazione si scelga a base AGC e a vertice F ; la piramide avrà l'altezza del tronco e rimarrà a dimostrare soltanto che la superficie del triangolo AGC è media proporzionale fra quelle ABC e DEF .

A quest'oggetto si tiri dal punto G la GL parallela a BC e si conduca anche GC ; il triangolo AGL sarà eguale a DEF giacchè essi hanno il lato $AG = FE$ come opposti di un parallelogrammo, l'angolo $GAL = EFD$ e $AGL = FED$ perchè aventi i lati rispettivamente paralleli e rivolti nello stesso verso. Ciò posto si paragoni il triangolo AGC con ABC e AGL . I triangoli ABC , AGC hanno la stessa altezza e perciò son proporzionali alle loro basi AG , AB ; si ha dunque:

$$ABC : AGC :: AB : AG.$$

Per una simil ragione dal confronto di AGL e AGC si deduce:

$$AGC : AGL :: AC : AL.$$

Infine dal parallelismo delle rette BC , GL ne viene:

$$AB : AG :: AC : AL.$$

I rapporti $AC : AL$ e $AB : AG$ essendo dunque eguali ne viene dalla combinazione delle prime due proporzioni che:

$$ABC : AGC :: AGC : AGL,$$

AGC è dunque media proporzionale fra ABC e AGL , ossia fra ABC e DEF , come si voleva dimostrare.

2.° Sia un tronco di piramide (fig. 214) qualunque $ABCDEFGH$ ottenuto dalla sezione di una piramide poligona $SABCD$ mediante un piano parallelo alla base. Si costruisca sul piano di questa base un triangolo $A'B'C'$ ad essa equivalente e su questo triangolo una piramide $S'A'B'C'$ della stessa altezza di quella data; le due piramidi saranno

equivalenti. Prolungato quindi il piano $EFGH$ esso per un altro teorema cognito farà nella nuova piramide una sezione equivalente a quella $EFGH$ e così la piramide $SEFGH$ sarà equivalente all'altra $S'E'F'G'$. Ond'è che il tronco $ABCDEF GH$ sarà equivalente a quello $A'B'C'E'F'G'$ come differenza ciascuno di quantità equivalenti. Ora il tronco di piramide triangolare può considerarsi come la somma di tre piramidi poste nelle condizioni che indica l'enunciato del teorema; dunque altrettanto potrà dirsi pel tronco di piramide poligona.

Scolio. Si indichino con B, b le due basi di un tronco di piramide con V il suo volume e con h l'altezza, avremo:

$$V = \frac{h}{3} B + \frac{h}{3} b + \frac{h}{3} \sqrt{Bb},$$

ossia:
$$V = \frac{h}{3} [B + b + \sqrt{Bb}].$$

Si può evitare il calcolo dei radicali quando si conoscano due lati omologhi A, a nelle basi che sappiamo dover essere poligoni simili. Difatto noi avremo:

$$B : b :: A^2 : a^2,$$

e perciò:
$$b = \frac{a^2}{A^2} B.$$

Sostituendo quest'espressione nel valore di V , si ottiene:

$$V = \frac{h}{3} \left[B + \frac{a^2 B}{A^2} + \sqrt{\frac{a^2 B^3}{A^2}} \right],$$

e riducendo:
$$V = \frac{hB}{3} \left[1 + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a}{A} \right].$$

§ 26.

Il volume di un tronco di prisma triangolare è eguale al prodotto di una sezione perpendicolare agli spigoli paralleli pel terzo della somma di questi. Il volume di un tronco di parallelepipedo è eguale al prodotto della sezione retta pella semi-somma di due spigoli laterali opposti.

Teorema.

Un tronco di prisma triangolare è equivalente alla somma di tre piramidi che avessero per base una delle basi del tronco e per vertici i vertici dell'altra base (fig. 215).

Sia $ACBDEF$ il tronco. Condotti i piani EAB , EBF questo solido vien decomposto nelle tre piramidi $EABC$, $EBDF$, $EBAF$. La prima ha per base il triangolo ABC e per vertice il punto E . La terza è equivalente alla piramide $CABF$ come avente la stessa base ABF e i vertici C , E sopra una parallela al piano della base, e questa piramide $CABF$ può considerarsi col vertice in F e la base in ABC . La seconda è equivalente alla piramide $DACB$, giacchè presi per basi i triangoli BFD , BAD questi triangoli sono equivalenti come aventi la stessa base BD e eguale altezza, giacchè AF è parallela a BD e inoltre i vertici C , E delle due piramidi sono sopra una parallela CE al piano comune delle loro basi. E siccome la piramide $DABC$ può esser considerata col vertice in D e la base in ABC , così le tre piramidi in cui fu scomposto il tronco di prisma son quelle appunto indicate dal teorema.

COROLLARIO 1.° Si indichino con h , h' , h'' le distanze dei tre punti D , E , F al piano della base ABC la cui superficie indicheremo con B ; i volumi delle tre piramidi in questione saranno rispettivamente:

$$\frac{1}{3} B h, \quad \frac{1}{3} B h', \quad \frac{1}{3} B h'',$$

ed il volume V del tronco di prisma sarà perciò:

$$V = \frac{1}{3} B (h + h' + h'').$$

COROLLARIO 2.° Si indichi con S la superficie della sezione retta del prisma, con l, l', l'' le lunghezze dei tre spigoli BB, EC, FA . Il prisma obliquo di base B e altezza h essendo equivalente al prisma retto di base S e altezza l , si ha:

$$Bh = Sl.$$

Per ragioni consimili:

$$Bh' = Sl', Bh'' = Sl'',$$

e perciò sostituendo nel valore di:

$$V = S \left(\frac{l + l' + l''}{3} \right),$$

vale a dire che il volume di un tronco di prisma triangolare eguaglia il prodotto della sua sezione retta per il terzo della somma dei suoi tre spigoli.

SCOLIO. Per misurare il volume di un tronco di prisma qualunque lo si scompone in tronchi triangolari.

Teorema.

Il volume di un tronco di parallelepipedo eguaglia il prodotto della sua sezione retta per la semi-somma di due spigoli laterali opposti (fig. 216).

Sia $ABCDEFGL$ il tronco dato di volume V . Decomposto nei due tronchi di prisma triangolari $ABCFGL$, $ACDLFE$ e supposto che $A'B'C'D'$ ne sia la sezione retta, il suo volume V sarà:

$$\frac{1}{3} A'B'C' [AL + BG + CF] + \frac{1}{3} ACD [AL + CF + DE],$$

e siccome i triangoli $A'B'C'$, $A'C'D'$ sono eguali anche da:

$$\frac{1}{3} A'B'C' [2AL + 2CF + BG + DE].$$

In simil guisa considerando scomposto il tronco totale nei due tronchi di prisma triangolari $ABDELG$, $CBDFGL$, si avrà che:

$$V = \frac{1}{3} A'B'D' [2BG + 2DE + AL + CF].$$

Osservando poi che i due valori ottenuti per V debbono essere eguali e che i triangoli $A'B'C'$, $A'B'D'$ di egual base ed altezza sono equivalenti, si giungerà all'equazione:

$$2AL + 2CF + BG + DE = 2BG + 2DE + AL + CF,$$

da cui: $AL + CF = BG + DE.$

E perciò sostituita nella prima espressione di V al posto di $BG + DE$ la quantità eguale $AL + CF$, avremo:

$$V = \frac{1}{3} A'B'C' [3AL + 3CF],$$

ossia:

$$V = A'B'C' [AL + CF] = A'B'C'D' \left[\frac{AL + CF}{2} \right],$$

giacchè il triangolo $A'B'C'$ è la metà del parallelogrammo $A'B'C'D'$.

§ 27.

I volumi di due poliedri simili
stanno fra loro come i cubi degli spigoli omologhi.

Teorema.

I volumi di due piramidi triangolari simili stanno fra loro come i cubi degli spigoli omologhi (fig. 217).

Siano $SABC$, $S'A'B'C'$ due piramidi triangolari di altezze rispettive SO , $S'O'$. Detti V e V' i loro volumi, avremo:

$$V = ABC \times \frac{SO}{3}, \quad V' = A'B'C' \times \frac{S'O'}{3}.$$

Le piramidi essendo simili, le loro basi lo saranno pure e perciò:

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3} = \frac{\overline{SA}^3}{\overline{S'A'}^3}.$$

I due angoli triedri A , A' essendo eguali le costole SA , $S'A$ sono eguagliate inclinate sui piani BAC , $B'A'C'$ e siccome le loro inclinazioni son rispettivamente misurate dagli

angoli piani SAO , $S'A'O'$, così si ha $SAO = S'A'O'$. Ond'è che i triangoli rettangoli SAO $S'A'O'$ sono equiangoli e simili e sussiste perciò la proporzione:

$$\frac{SO}{S'O'} = \frac{SA}{S'A'}.$$

Ciò premesso fatto il rapporto dei volumi V , V' si avrà:

$$\frac{V}{V'} = \frac{ABC \times SO}{A'B'C' \times S'O'},$$

e giovandosi delle precedenti eguaglianze:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\overline{SA}^3}{\overline{S'A'}^3},$$

come volevasi provare.

Teorema.

I volumi di due poliedri simili son proporzionali ai cubi dei loro spigoli omologhi.

Si decompongano i poliedri in piramidi simili e similmente disposte e quindi si scompongano queste piramidi in piramidi triangolari. Sieno V , V' , V'' , ec., i volumi di quelle che costituiscono il primo poliedro, e v , v' , v'' , ec., i volumi di quelle che formano il secondo. Le piramidi omologhe essendo simili e gli spigoli omologhi dei due poliedri essendo proporzionali, si avrà detti S , s due spigoli omologhi:

$$\frac{V}{v} = \frac{S^3}{s^3}, \quad \frac{V'}{v'} = \frac{S^3}{s^3}, \quad \frac{V''}{v''} = \frac{S^3}{s^3},$$

e perciò:
$$\frac{V}{v} = \frac{V'}{v'} = \frac{V''}{v''} =, \text{ ec.}, = \frac{S^3}{s^3},$$

da cui si deduce:

$$\frac{V + V' + V'' +, \text{ ec.},}{v + v' + v'' +, \text{ ec.},} = \frac{S^3}{s^3},$$

vale a dire che i volumi totali dei due poliedri son proporzionali ai cubi dei loro spigoli omologhi.

§ 28.



Cilindri, conî, sfera e poliedri regolari. Definizioni e prime conseguenze che ne derivano.

La *superficie cilindrica* è quella superficie che è generata da una retta che si muove parallelamente a una data direzione e appoggiandosi sempre a una curva fissa. Questa curva dicesi *direttrice* e la retta mobile *generatrice* della superficie.

Quando la direttrice è una curva chiusa, tagliando la superficie con due piani paralleli si forma un solido detto *cilindro*. Le due sezioni ACB , $A'C'B'$ sono le *basi* del cilindro; la distanza dei loro piani ne è l'*altezza* (fig. 218).

Un cilindro è *circolare* quando la sua base è un circolo. Il cilindro circolare è poi *retto* od *obliquo* secondochè la sua generatrice è perpendicolare od obliqua ai piani delle sue basi.

Da ciò che abbiain detto ne consegue che un cilindro circolare retto può anche considerarsi come generato da un rettangolo $AOO'A'$ che ruoti attorno ad uno dei suoi lati OO' . Qualche volta noi ci gioveremo anche di questa osservazione.

La retta che unisce i centri delle due basi di un cilindro ne è l'*asse*. Essa è evidentemente parallela alle sue generatrici.

Un piano è *tangente* ad una superficie cilindrica quando non ha a comune con essa che una sola generatrice.

Un prisma è *inscritto* in un cilindro quando le sue basi sono inscritte in quelle del cilindro. Al contrario un prisma è *circoscritto* a un cilindro quando ha per basi dei poligoni circoscritti alle basi del cilindro. Le faccie laterali del prisma circoscritto son tangenti alla superficie del cilindro.

Si chiama *superficie conica* quella superficie che è generata da una retta che si muove passando costantemente per un punto e appoggiandosi sopra una curva fissa. Il punto è il *vertice* della superficie, la curva fissa la *direttrice* e la retta mobile è la *generatrice*.

Quando la direttrice è una curva chiusa, se si taglia la superficie conica con un piano, il solido limitato da questo piano e dalla parte di superficie che termina al vertice vien detto *cono* (fig. 219).

Il cono è *circolare* quando ha per *base* un circolo, la sua *altezza* è la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base.

Asse di un cono circolare è la retta che unisce il vertice col centro della base. Il cono è poi *retto* od *obliquo* secondo che il suo asse è o non è perpendicolare al piano del circolo base.

Secondo quello che abbiamo detto un cono circolare retto può considerarsi generato da un triangolo rettangolo ASO che ruota attorno ad uno dei suoi cateti SO . Noi ci gioveremo talvolta di questa osservazione.

Un piano è *tangente* ad una superficie conica allorchè non ha colla medesima che una generatrice a comune.

Una piramide è *inscritta* in un cono quando ha per base un poligono inscritto nella base del cono e i loro vertici coincidono. Al contrario una piramide è *circoscritta* a un cono quando la sua base è un poligono circoscritto alla base del cono e i loro vertici coincidono; le faccie laterali della piramide sono allora tangenti al cono.

Due cilindri retti o due coni retti son *simili* allorchè le loro altezze stanno fra loro come i raggi delle rispettive basi.

La superficie *sferica* è generata dalla rivoluzione di una semi circonferenza AMB attorno al suo diametro. *Sfera* è il solido racchiuso da questa superficie.

Tutti i punti della superficie sferica essendo situati a egual distanza dal centro C della semi-circonferenza *generatrice*, questo punto è detto *centro* della sfera (fig. 220).

Raggio è la retta che va dal centro a un punto qualunque della superficie sferica. Tutti i raggi sono eguali. *Diametro* è una retta che termina da ambo i lati alla superficie sferica passando per il centro. Tutti i diametri sono eguali e doppi del raggio.

Piano tangente ad una sfera è quel piano che ha colla sua superficie un solo punto a comune detto *punto di contatto*.

§ 29.

La superficie laterale di un cilindro è eguale al prodotto del perimetro di una sezione perpendicolare alle generatrici per la lunghezza comune di queste. La superficie convessa di un tronco di cilindro circolare retto è eguale al prodotto del suo asse per la circonferenza della sua base circolare.

Teorema.

La superficie laterale di un cilindro è il limite delle superfici de' prismi regolari inscritti e circoscritti (fig. 221).

Il volume del cilindro è il limite del volume di questi prismi.

1.° Si iscriva nella base inferiore del cilindro un poligono regolare $ABCD$, indi per ognuno dei lati del medesimo e per le corrispondenti generatrici del cilindro si conducano dei piani $ABB'A'$, $BCC'B'$, ec., prolungandoli fino all'incontro della base superiore. Si formerà un prisma regolare AC' inscritto nel cilindro. Si circoscriva poscia al circolo O un poligono regolare $EFGH$ dello stesso numero di lati di quello già inscritto o si ripeta una costruzione identica a quella già eseguita più sopra. Formeremo così un prisma regolare circoscritto al cilindro. La superficie laterale del primo prisma e il suo volume saranno evidentemente minori della superficie laterale e volume del cilindro, mentre al contrario la superficie e il volume del prisma circoscritto saranno maggiori delle corrispondenti cilindriche.

Si indichino ora con s , S le superfici dei prismi inscritti e circoscritti con p , P , i perimetri delle loro sezioni rette con g il loro spigolo comune. Se si raddoppia il numero dei lati delle basi la superficie s cresce, mentre S diminuisce, restando però la prima minore e la seconda mantenendosi maggiore di quella del cilindro. Ora si ha:

$$S = P \times g,$$

$$s = p \times g,$$

e perciò:

$$S - s = (P - p) g.$$

Ora la differenza fra i perimetri delle due basi e perciò anche quella fra i perimetri delle sezioni rette andando continuamente avvicinandosi verso lo zero quando si raddoppia il numero dei lati dei poligoni, mentre invece g rimane costante, la quantità $S - s$ si avvicina pure verso lo zero e perciò la superficie del cilindro che sta sempre compresa fra S , s è il limite di amendue.

2.° Detti V , v i volumi dei prismi ed h la loro altezza comune, si ha chiamando B , b le basi:

$$V = B \times h,$$

$$v = b \times h,$$

e perciò: $V - v = (B - b) \times h.$

Al solito la quantità $B - b$ tendendo verso zero, mentre h riman costante $V - v$ tende pure verso lo zero e così il volume del cilindro è il limite comune dei due volumi V , v .

Teorema.

La superficie laterale del cilindro eguaglia il prodotto del perimetro della sua sezione retta per la lunghezza della generatrice.

Sia S la superficie laterale di un cilindro, P il perimetro della sua sezione retta, g la generatrice e sieno S' e P' la superficie di un prisma circoscritto e il perimetro della sua sezione retta. Se si suppone di raddoppiare indefinitamente il numero delle faccie di questo prisma le variabili S' e $P' \times g$ hanno per limiti rispettivi S e $P \times g$. Ora siccome si mantien sempre:

$$S' = P' \times g,$$

i loro limiti saranno pure eguali e avremo pure:

$$S = P \times g.$$

COROLLARIO 1.° Se il cilindro è retto la sezione retta si confonde colla base, e perciò detto R il raggio di questa base e A l'altezza del cilindro che eguaglia la generatrice, otterremo:

$$P = 2\pi R,$$

e quindi:

$$S = 2\pi RA.$$

ESEMPIO. Sia un cilindro di 2^m di altezza e 1^m di raggio di base, avremo:

$$S = 2\pi \times 2 = 4\pi = 12^m, 56.$$

COROLLARIO 2.° Sempre nel caso del cilindro retto detta T la superficie totale, questa sarà eguale a quella laterale aumentata dalle due basi del cilindro che, come sappiamo, son cerchi e perciò:

$$T = S + 2\pi R^2 = 2\pi RA + 2\pi R^2,$$

ovvero:
$$T = 2\pi R(R + A),$$

vale a dire che:

La superficie totale del cilindro circolare retto eguaglia il prodotto della sua circonferenza base pella somma dell'altezza e del raggio della base.

Riprendendo l'esempio numerico disopra si avrà:

$$T = 2\pi(1 + 2) = 6\pi = 18^m, 84.$$

Teorema.

La superficie di un tronco di cilindro circolare retto eguaglia il prodotto del suo asse per la circonferenza della sua base circolare (fig. 222).

Sia $ABCD$ il tronco dato. Per l'estremità O' del suo asse si conduca un piano parallelo a quello della base O e si prolunghino le generatrici del cilindro fino all'incontro di questo piano. La superficie del solido $GNMO'C$ ed il solido stesso saranno eguali a quella ed al solido $FNMO'D$. Difatto fatta coincidere la semi-circonferenza MGN sull'altra MFN per modo che G cada in f il piano Co' si applicherà sopra $o'D$ perchè i diedri in MN sono eguali. Inoltre la generatrice GC cadrà sopra FD perchè amendue perpendicolari allo stesso piano e perciò il punto C si situerà in D . Lo stesso essendo vero per ogni altra generatrice i due solidi, nonchè le loro superfici saranno eguali come sovrapponibili l'un l'altro. Ond'è che se dal tronco si toglie il solido $DNMO'F$ per rimpiazzarlo coll'altro $CNMO'G$ il

resultato che è il cilindro retto $ABGF$ sarà equivalente in superficie e volume al dato tronco.

Ora la misura della superficie del cilindro $ABGF$ essendo data da:

$$\text{circonf. } O \times OO',$$

tale sarà pure la misura della superficie laterale del tronco.

§ 30.

Il volume di un cilindro è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Il volume di un tronco di cilindro circolare retto è eguale al prodotto del suo asse per la sua base circolare.

Teorema.

Il volume di un cilindro è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Sia V il volume di un cilindro di cui l'altezza è h e la base B . Si indichino con V' il volume e B' la base di un prisma regolare circoscritto al cilindro. Le quantità variabili V' e $B' \times h$ avranno per limiti rispettivi V e $B \times h$ quando si suppone che il numero delle faccie del prisma vada continuamente raddoppiando. Ora siccome nella variazione si ha sempre:

$$V' = B' \times h,$$

ne consegue che i loro limiti debbono essere eguali, vale a dire che:

$$V = B \times h.$$

COROLLARIO. Detto R il raggio della base del cilindro si ha:

$$B = \pi R^2,$$

e perciò:

$$V = \pi R^2 h.$$

ESEMPIO. Se $R = 1$, $h = 2$, si ha:

$$V = 2\pi = 6^{\text{mo}}, 28.$$

Teorema.

Il volume di un tronco di cilindro circolare retto è eguale al prodotto del suo asse per la sua base circolare.

Convertito come fu detto il tronco in un cilindro equivalente della medesima base e di altezza eguale all'asse, il teorema in quistione rimane evidente.

§ 31.

In due cilindri circolari simili: 1.° Le superfici convesse e le superfici totali stanno fra loro come i quadrati dei raggi delle basi o degli assi o delle altezze; 2.° I volumi stanno fra loro come i cubi delle stesse linee.

Teorema.

In due cilindri circolari simili:

1.° *Le superfici convesse e le superfici totali stanno fra loro come i quadrati dei raggi delle basi o delle altezze;*

2.° *I volumi stanno fra loro come i cubi di queste linee.*

1.° Sieno S, S' le superfici convesse, T, T' le superfici totali di due cilindri di altezze rispettive A, A' e raggi della base R, R' . I cilindri essendo simili, noi dobbiamo avere:

$$\frac{A}{A'} = \frac{R}{R'}, \text{ e perciò: } \frac{A + R}{A' + R'} = \frac{R}{R'} = \frac{A}{A'}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ora si ha pure:} \quad S &= 2\pi R A, \\ S' &= 2\pi R' A', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= 2\pi R (R + A), \\ T' &= 2\pi R' (R' + A'). \end{aligned}$$

$$\text{Dunque:} \quad \frac{S}{S'} = \frac{RA}{R'A'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{A^2}{A'^2},$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{R(R+A)}{R'(R'+A')} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{A^2}{A'^2}.$$

2.° Detti V , V' i volumi dei due cilindri, noi sappiamo che:

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 A, \\ V' &= \pi R'^2 A', \end{aligned}$$

e perciò: $\frac{V}{V'} = \frac{R^2 A}{R'^2 A'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{A}{A'}$,

come si voleva provare.

§ 32.

La superficie convessa di un cono circolare retto è eguale al prodotto della circonferenza della sua base per la metà della sua generatrice. La superficie convessa di un tronco di cono circolare retto a basi parallele è eguale al prodotto della semi-somma delle circonferenze delle sue basi per la sua generatrice, ovvero al prodotto di questa per la circonferenza della sezione equidistante dalle basi.

Teorema.

La superficie laterale di un cono circolare retto è il limite delle superfici laterali delle piramidi regolari inscritte e circoscritte (fig. 223).

1.° Si iscriva nella base del cono un poligono regolare $ABCD$ e si conducano dei piani pel vertice e ciascheduno dei suoi lati. Si formerà una piramide regolare $SABCD$ inscritta nel cono la cui superficie laterale e volume saranno evidentemente minori di quelli del cono stesso.

Si circoscriva quindi un poligono regolare $EFGH$ dello stesso numero di lati di quello inscritto e si effettui una costruzione simile a quella indicata di sopra. Formeremo una piramide regolare circoscritta al cono la cui superficie e volume saranno evidentemente più grandi di quelli del cono.

Ciò posto sieno s , S le superfici laterali delle piramidi inscritta e circoscritta, p , P , i perimetri delle loro basi b , B ; a , A , i loro apotemi e h l'altezza. Raddoppiando il numero dei lati dei poligoni basi, la superficie s cresce, mentre quella S diminuisce rimanendo però sempre la prima minore e la seconda maggiore di quella del cono. Ora si ha:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} p \times a, \\ S &= \frac{1}{2} P \times A; \end{aligned}$$

dunque: $S - s = \frac{1}{2} (P \times A - p \times a).$

Aggiungendo e sottraendo al secondo membro la quantità $\frac{1}{2} p \times A$:

$$S - s = \frac{1}{2} (P - p) A + \frac{1}{2} (A - a) p.$$

Ora se il numero dei lati delle basi cresce indefinitamente le quantità $P - p$, $A - a$ tendono verso zero e perciò anche la differenza $S - s$ tende pure verso lo zero. Dunque la superficie del cilindro che è sempre compresa fra s e S ne sarà il loro limite comune.

2.° Detti V e v i volumi delle piramidi circoscritte ed inscritte, si avrà:

$$V = \frac{1}{3} B h, \quad v = \frac{1}{3} b h,$$

e perciò: $V - v = \frac{1}{3} h (B - b).$

Supponendo al solito che il numero dei lati delle basi vada continuamente crescendo la quantità $B - b$ si avvicinerà verso zero e perciò avverrà lo stesso di $V - v$. E siccome il volume del cono è sempre compreso fra V e v ne sarà il loro limite comune.

Teorema.

La superficie convessa di un cono circolare retto è eguale al prodotto della circonferenza della sua base per la metà della generatrice.

Sia S la superficie convessa del cono il cui raggio della base è R . Si indichino con S' la superficie laterale di una piramide regolare circoscritta al cono e con P' il perimetro della sua base. Se il numero dei lati di questa cresce indefinitamente le variabili S' e $P' \times \frac{1}{2} A$ in cui A è l'apotema della piramide hanno per limiti S e circonf. $R \times \frac{1}{2} G$ essendo G la generatrice del cono. Ora siccome nella piramide è sempre:

$$S' = P' \times \frac{1}{2} A,$$

così anche i loro limiti saranno eguali, vale a dire che:

$$S = \text{circonf. } R \times \frac{1}{2} G.$$

COROLLARIO 1.° Essendo circonferenza $R = 2\pi R$ si ha:

$$S = \pi R G.$$

ESEMPIO. Sia un cono avente per raggio di base 1^m, 5 e per generatrice 3^m; avremo:

$$S = 3,14 \times 1,5 \times 3 = 14^{\text{m}}, 13.$$

COROLLARIO 2.° *La superficie totale di un cono eguaglia la metà del prodotto della circonferenza della sua base per la somma della generatrice e del raggio della base.*

Chiamata T la superficie totale, siccome essa si compone di quella convessa più la superficie del circolo base, avremo:

$$T = \pi R G + \pi R^2 = \frac{2\pi R}{2} (R + G).$$

Teorema.

La superficie laterale di un tronco di cono retto a basi parallele ha per misura il prodotto della semi-somma delle circonferenze delle sue basi per la sua generatrice (fig. 224).

Sia $ABED$ il tronco prodotto dalla sezione del piano EFD nel cono SAB . Per l'estremo A della generatrice SA si conduca una perpendicolare qualunque AG alla medesima e vi si prenda la lunghezza AG eguale alla circonferenza di raggio CA . Si tiri SG e per il punto D si conduca DH parallela ad AG . Essendo SC l'asse del cono i triangoli rettangoli e simili SFD , SCA danno la proporzione:

$$SD : SA :: FD : CA,$$

e siccome i raggi stanno fra loro come le circonferenze:

$$SD : SA :: \text{circonf. } FD : \text{circonf. } CA.$$

I triangoli SDH , SGA essendo anche simili, ne viene:

$$SD : SA :: DH : \text{circonf. } CA.$$

Il paragone delle due ultime proporzioni che hanno tre termini a comune mostra che deve essere :

$$DH = \text{circonf. } FD.$$

Ciò posto la superficie convessa del cono SAB essendo circonf. $\frac{CA \times SA}{2}$ eguaglierà quella del triangolo SAG che ha la stessa misura. Per una consimile ragione il cono SED avrà una superficie equivalente a quella del triangolo SDH e così la superficie laterale del tronco dovrà essere equivalente a quella del trapezio $DHGA$ differenza dei due triangoli come il tronco lo è dei due coni.

Ora la misura del trapezio è data da :

$$DA \frac{(DH + AG)}{2} = \frac{DA}{2} [\text{circonf. } DF + \text{circonf. } CA],$$

dunque riman dimostrato il teorema in quistione.

COROLLARIO. *La superficie laterale di un tronco di cono retto a basi parallele eguaglia il prodotto della sua generatrice per la circonferenza di una sezione parallela ed equidistante dalle basi.*

Se per il mezzo M della generatrice si conduce ML parallela ad AG la retta $ML = \frac{1}{2} (AG + DH)$. Ora siccome ML è anche eguale alla circonferenza in quistione, lo chè può dimostrarsi in modo analogo a quel che fu fatto per DH , e d'altra parte il trapezio $AGHD$ ha per misura $ML \times AD$ la misura della superficie del tronco potrà esprimersi nel modo sopra indicato.

§ 33.

Il volume di un cono retto è eguale al prodotto della sua base pel terzo dell'altezza. Il volume di un tronco di cono retto a basi parallele è eguale al prodotto del terzo della sua altezza per la somma delle sue basi e di una media proporzionale fra le medesime.

Il volume di un cono retto è eguale al prodotto della sua base pel terzo dell'altezza.

Siano V il volume del cono il cui raggio della base è R e l'altezza A . Si indichino con V' il volume e con B la base

di una piramide regolare circoscritta al cono. Se il numero delle faccie di questa piramide cresce indefinitamente, le variabili V' e $\frac{1}{3} B \times A$ hanno per limite rispettivo V e $\frac{\pi R^2}{3} \times A$. Ora la quantità V' essendo sempre eguale a $\frac{1}{3} B \times A$ i loro limiti dovranno esserlo pure, vale a dire che:

$$V = \frac{\pi R^2 A}{3}.$$

ESEMPIO. Sia $A = 2^m$, $R = 1^m, 5$, avremo:

$$V = \frac{3,14 \times 2,25 \times 2}{3} = 4^m, 710.$$

COROLLARIO 1.° Due coni retti di egual base stanno fra loro come le altezze e due coni retti di eguale altezza son proporzionali ai quadrati dei raggi delle basi.

1.° Detti V , V' i volumi dei due coni di altezza A e di raggi R , R' , si ha:

$$V = \frac{\pi R^2 A}{3}, \quad V' = \frac{\pi R'^2 A}{3},$$

indi:

$$V : V' :: R^2 : R'^2.$$

2.° Se R è il raggio dei due coni A , A' le loro altezze:

$$V = \frac{\pi R^2 A}{3}, \quad V' = \frac{\pi R^2 A'}{3},$$

e quindi:

$$V : V' :: A : A'.$$

COROLLARIO. Un cono retto è il terzo del cilindro di egual base ed altezza.

Detti V , V' i volumi dei due solidi di raggio R e altezza A , si avrà:

$$V = \frac{\pi R^2 A}{3} \quad V' = \pi R^2 A,$$

ovvero:

$$V = \frac{1}{3} V'.$$

Teorema.

Il volume di un tronco di cono retto a basi parallele è eguale al prodotto del terzo della sua altezza per la somma delle sue basi e di una media proporzionale fra le medesime (fig. 225).

Sia $DBFE$ il tronco prodotto dalla sezione del piano FCB nel cono SED . Si chiamino r , R i raggi CB , AD

delle due basi, a , A le altezze SC , SA ed h quella CA del tronco. Questo solido essendo la differenza dei coni SAD , SCB avrà per volume :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 A - \frac{1}{3} \pi r^2 a.$$

Ora dai triangoli simili SCB , SDA si ha :

$$r : R :: a : a + h,$$

e perciò :

$$ar + hr = aR$$

e

$$a = \frac{hr}{R-r}.$$

Quindi :

$$A = a + h = \frac{hr}{R-r} + h = \frac{hR}{R-r}.$$

Sostituendo questi valori di a , A in quello di V si ottiene :

$$V = \frac{\pi h R^2}{3(R-r)} - \frac{\pi h r^2}{3(R-r)},$$

ossia :

$$V = \frac{\pi h}{3} \left(\frac{R^2 - r^2}{R-r} \right),$$

e effettuando la divisione indicata :

$$V = \frac{h}{3} [\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr].$$

Ora πR^2 rappresenta la maggior base del tronco, πr^2 la più piccola e πRr la loro media proporzionale, dunque riman dimostrato il teorema in quistione.

§ 34.

In due coni circolari simili: 1.° Le superfici convesse e le superfici totali stanno fra loro come i quadrati dei raggi delle basi, o degli assi o delle altezze; 2.° I volumi stanno fra loro come i cubi delle stesse linee.

Teorema.

In due coni circolari simili:

1.° *Le superfici convesse e totali stanno fra loro come i quadrati dei raggi delle basi o delle altezze;*

2.° *I volumi stanno fra loro come i cubi delle stesse linee.*

1.° Siano S , S' le superfici convesse, T , T' le superfici totali di due coni aventi per raggio di base R , R' , per

altezza A, A' e per generatrici G, G' . I coni essendo simili si ha prima di tutto:

$$A : A' :: R : R',$$

e siccome le generatrici stanno come le altezze e i raggi delle basi:

$$G : G' :: A : A' :: R : R',$$

donde:
$$\frac{G + A}{G' + A'} = \frac{A}{A'} = \frac{R}{R'} = \frac{G + R}{G' + R'}.$$

Ciò posto noi sappiamo che:

$$S = \pi G R, S' = \pi G' R', \\ T = \pi R(R + G), T' = \pi R'(R' + G').$$

Dunque:
$$\frac{S}{S'} = \frac{G R}{G' R'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{A^2}{A'^2},$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{R(R + G)}{R'(R' + G')} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{A^2}{A'^2}.$$

2.° Detti V, V' i volumi dei due coni si sa che:

$$V = \frac{\pi R^2 A}{3}, V' = \frac{\pi R'^2 A'}{3},$$

indi:
$$\frac{V}{V'} = \frac{R^2 A}{R'^2 A'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{A^2}{A'^2}.$$

§ 35.

Ogni sezione fatta da un piano in una sfera è un circolo. I circoli di una sfera son tanto minori quanto più distano dal centro. Definizione dell'asse e dei poli di un circolo di una sfera. Come si misuri l'angolo formato da due archi di circoli massimi.

Teorema.

Ogni sezione fatta da un piano nella sfera è un circolo (fig. 226).

Se il piano secante passa per il centro tutti i punti della sezione della superficie sferica essendo egualmente distanti dal centro non vi ha dubbio che la curva determinata non sia una circonferenza.

Se il piano non passa pel centro della sfera e che ADB sia la curva di sezione si abbassi dal centro O la perpendi-

colare OC al piano secante. I raggi OA , OB , OD , tirati ai diversi punti A , B , D della curva ADB essendo eguali si scosteranno egualmente dal piede della perpendicolare OC , e perciò la curva ADB avrà tutti i punti ad egual distanza dal punto C . Sarà perciò una circonferenza col centro in questo medesimo punto.

SOLIO 1.° I cerchi che hanno lo stesso centro e raggio della sfera si chiamano *cerchi massimi*, e son tutti eguali. Due cerchi massimi si tagliano secondo un diametro della sfera.

Ogni cerchio tracciato sulla sfera senza avere il suo centro è un *cerchio minore*. Il suo centro e quello della sfera si trovano sopra una retta perpendicolare al suo piano.

SOLIO 2.° Dalle date definizioni risulta ad evidenza che i cerchi minori son tanto più piccoli quanto più i loro piani si allontanano dal centro della sfera.

SOLIO 3.° La perpendicolare abbassata dal centro sul piano di un cerchio tracciato sulla superficie sferica dicesi *asse* e i punti nei quali essa incontra questa superficie sono i *poli* del cerchio. E perciò due cerchi i cui piani son paralleli hanno lo stesso asse e i medesimi poli.

SOLIO 4.° Si chiama *angolo* di due cerchi tracciati sulla superficie sferica l'angolo formato dalle tangenti a questi cerchi tirate nel loro punto di incontro.

Teorema.

L'angolo di due cerchi massimi ha per misura l'arco di cerchio pure massimo che ha per polo il vertice dell'angolo dato (fig. 227).

Sieno ABC , ADC i due archi di cerchi massimi formanti l'angolo in A . La tangente in A al cerchio ABC essendo perpendicolare ad AC sarà parallela ad OB , per una simil ragione la tangente in A all'altro cerchio ADC sarà parallela ad OD . Dunque l'angolo BOD che ha lati paralleli a quelli dell'angolo che si vuol misurare gli sarà eguale. Ora l'angolo BOD come angolo al centro del cerchio massimo BDE il cui polo è A vien misurato dall'arco BD , dunque quest'arco misura pure l'angolo dei due cerchi massimi.

COROLLARIO. Le rette OB , OD essendo amendue perpendicolari alla AC nei piani rispettivi ABC , ADC il loro angolo è la misura del diedro formato da questi piani. Si vede adunque che:

L'angolo di due cerchi massimi è eguale all'angolo diedro formato dai loro piani.

§ 36.

Un piano perpendicolare all'estremità di un raggio di una sfera è tangente alla sfera e viceversa. Quando due superfici sferiche si toccano i loro centri ed il punto di contatto sono in linea retta.

Il piano perpendicolare all'estremità di un raggio è tangente alla sfera e viceversa (fig. 228).

1.° Sia il piano BAC perpendicolare nel punto A al raggio AO . Preso un punto qualunque D del medesimo diverso da A e tirata OD questa retta come obliqua al piano sarà più lunga della OA e perciò il punto D sarà fuori della sfera. Ond'è che il piano BAC non avendo colla superficie sferica che il solo punto A di comune le sarà tangente.

2.° Scelto un punto qualunque D del piano BAC diverso da A siccome esso è al di fuori della sfera la retta OD è maggiore di OA . E perciò la OA è la più corta fra tutte le rette che si posson condurre dal punto O al piano BAC , vale a dire è la perpendicolare.

COROLLARIO. Per un punto della superficie della sfera non le si può condurre che un solo piano tangente.

Si dice che due superfici sferiche son *tangenti* allorchè hanno un solo punto a comune ed in quel punto il piano tangente comune. Esse possono esserlo internamente o esternamente.

Teorema.

Allorchè due superfici sferiche sono tangenti la retta che unisce i loro centri passa pel punto di contatto (fig. 229).

Sieno C , C' le due sfere, A il loro punto di contatto, MN il piano tangente in questo punto. Tirate CA , $C'A$ ognuna

di esse pel teorema precedente sarà perpendicolare al piano MN . E siccome per un punto non si può elevare che una sola perpendicolare ad un piano così AC sarà il prolungamento di AC' .

§ 37.

In ogni poligono sferico un lato qualunque è minore della somma di tutti gli altri. La minima distanza fra due punti dati sopra una superficie sferica è l'arco di circolo massimo minore di una semi-circonferenza che li congiunge. In ogni poligono sferico convesso la somma dei lati è minore della circonferenza di un circolo massimo.

Si chiama *poligono sferico* la porzione della superficie della sfera compresa fra più archi di circolo massimo. Questi archi sono i *lati* del poligono; gli angoli che essi formano ne sono gli *angoli* e i punti di intersezione i *vertici*.

I poligoni sferici possono esser *triangoli*, *quadrilateri*, *pentagoni*, ec.

Teorema.

Ogni lato di un poligono sferico è minore della somma di tutti gli altri (fig. 230).

Sia $ABCD$ il poligono dato ed O il centro della sfera. I piani dei lati del poligono determinano al centro un angolo solido O i cui angoli piani hanno per rispettiva misura i lati del poligono. Ora ogni angolo piano dell'angolo solido è minore della somma di tutti gli altri, dunque ogni lato del poligono sferico è minore della somma degli altri.

Teorema.

Le più corte distanze dal polo di una circonferenza a diversi punti della medesima sono eguali (fig. 231).

Sieno PAB , PCD i più corti cammini fra il polo P della circonferenza $MBCN$ e due punti B e C della medesima. Se si fa girare il semicerchio PML intorno all'asse PL per modo che descriva la sfera, il punto B descrivendo la circonferenza $BCNM$ vi sarà una posizione nella quale dovrà cadere in C . In questa posizione il più corto cammino

fra P e C sulla superficie sferica non potendo esser che un solo la curva PAB deve coincidere con PDC . Queste due curve dunque sono eguali.

Teorema.

Il più corto cammino fra due punti posti sulla superficie della sfera è l'arco del circolo massimo minore della semi-circonferenza che li congiunge (fig. 232).

Sieno A e B i punti dati e AB l'arco di cerchio massimo che li unisce. Si prenda un punto qualunque C del medesimo e quindi incominceremo a dimostrare che il più corto cammino fra A e B deve passare per C . Ciò provato siccome il punto C è preso a piacere rimarrà egualmente provato che questo più corto cammino non è altro che ACB .

Per l'oggetto in quistione dal punto A come polo si descriva una circonferenza CDF alla quale naturalmente l'arco AC sarà perpendicolare. Dal punto B pure come polo e colla distanza polare BC descritta una seconda circonferenza essa sarà anche perpendicolare all'arco BC e così le due circonferenze CDF , CEG resulteranno tangenti in C .

Ciò posto si supponga che il più corto cammino fra A e B sia la curva qualunque $ADEB$ che taglia le descritte circonferenze in D ed E . È chiaro che le tre lunghezze AD , DE , EB rappresenteranno i più corti cammini fra A e D fra D ed E ed E e B . Ora il polo A essendo egualmente distante da tutti i punti della circonferenza CDF la distanza minore da A in D eguaglia quella da A in C ; lo stesso dicasi per i punti B e C . E perciò l'arco ACD è più corto della curva $ADEB$. Lo stesso dimostrandosi per qualunque altra ne segue che il più corto cammino da A in B non può essere che l'arco AB .

Teorema.

In ogni poligono sferico convesso la somma dei lati è minore della circonferenza di un circolo massimo.

Sia $ABCD$ (fig. 233) il poligono dato. I piani dei suoi lati determinano al centro della sfera un angolo solido convesso $OABCD$ nel quale gli angoli piani hanno per misura re-

spettiva gli archi lati del poligono. Ma noi sappiamo che la somma di questi angoli piani è minore di quattro retti, dunque la somma dei lati è minore di 360° ovvero della circonferenza di circolo massimo sulla quale gli angoli piani furono misurati.

§ 38.

Se dai tre vertici di un dato triangolo sferico, come poli si descrivono tre circonferenze di circoli massimi, si formano altri triangoli sferici, i cui vertici sono poli dei lati del triangolo dato, e in uno di siffatti triangoli i lati sono supplementari degli angoli del triangolo dato, e gli angoli sono supplementari dei lati del triangolo medesimo. La somma degli angoli di un triangolo sferico è maggiore di due e minore di sei angoli retti.

Teorema.

Dato un triangolo sferico ABC se dai suoi vertici A, B, C come poli si descrivono le circonferenze di circolo massimo $B'C'B''C''$, $C'A'C'A''$, $A'B'A''B''$, queste linee dividono la superficie della sfera in otto triangoli sferici, tali che i vertici di ognuno di essi sono i poli dei lati del triangolo ABC (fig. 234).

I tre circoli massimi tracciati dividono prima di tutto la sfera in otto triangoli, cioè: $A'C'B'$, $A''C''B'$, $A'B'C'$, $A''B'C''$, $A'C''B''$, $A''C''B''$, $A'C'B''$, $A''C'B''$.

Consideriamo uno qualunque di questi triangoli, per esempio, $A'B'C'$. Il punto B essendo polo dell'arco $A'C'$ la distanza da B ad A' è un quadrante; similmente il punto C essendo polo del circolo $A'B''$ la distanza da C ad A' è pure un quadrante. E così il punto A' dista di un quadrante tanto da B come da C ed è in conseguenza il polo dell'arco BC . Si dimostrerebbe egualmente che B'' è il polo dell'arco AC o C' quello dell'arco AB .

SOLIO. Fra gli otto triangoli designati merita particolar menzione quello $A'B'C'$ che si distingue dagli altri per avere il vertice A' dalla stessa parte dell'arco BC del punto A , il vertice B' dalla stessa parte dell'arco AC del punto B e il vertice C' dalla stessa parte dell'arco AB del punto C .

I due triangoli ABC , $A'B'C'$ considerati uno rapporto all'altro furon chiamati da Legendre *triangoli polari*. Si dicono anche triangoli *supplementari* per una proprietà che dimostreremo in breve.

Teorema.

In due triangoli polari gli angoli dell'uno sono supplementari dei lati dell'altro e viceversa (fig. 235).

Sieno ABC , $A'B'C'$ due triangoli polari. Si prolunghino i lati AB , AC dell'angolo A fino ad incontrare in D ed E il lato $B'C'$ dell'altro triangolo il di cui polo è A . L'angolo BAC sarà allora misurato dall'arco DE . Ciò posto si osservi che B' essendo il polo dell'arco AC , come C' lo è dell'arco AB le distanze $B'E$, $C'D$ sono quadranti, e perciò:

$$B'E + C'D = 180^\circ.$$

Ponendo in questa eguaglianza al posto di $B'E$, $B'D + DE$ si ottiene:

$$B'D + DE + C'D = 180^\circ,$$

e osservando che: $B'D + C'D = B'C'$,

$$B'C' + DE = 180^\circ.$$

E perciò l'angolo A è il supplemento del lato $B'C'$.

Si dimostrerebbe in simil guisa che gli altri due angoli del triangolo ABC hanno per supplemento gli altri due lati del triangolo $A'B'C'$ e che viceversa gli angoli del triangolo $A'B'C'$ son supplementari dei lati di ABC .

Teorema.

La somma dei tre angoli di un triangolo sferico è minore di sei e maggiore di due angoli retti.

Detti A , B , C i tre angoli del triangolo. Siccome ognuno di essi è minore di due retti la loro somma è inferiore a sei retti. Inoltre se si immagina costruito il suo triangolo polare esso avrà dei lati eguali a:

$$180^\circ - A, 180^\circ - B, 180^\circ - C.$$

Ma sapendosi che la somma dei tre lati di un triangolo sferico è inferiore ad una circonferenza ne verrà l'ineguaglianza:

$$180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C < 360^\circ.$$

Trasportando e riducendo si ottiene:

$$A + B + C > 180^\circ,$$

come si voleva provare.

SCOLIO. Si chiama *eccesso sferico* di un triangolo l'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due retti.

Un triangolo sferico è *rettangolo* quando ha un angolo retto, è *birettangolo* se ne ha due, è *trirettangolo* se ne ha tre.

Tre cerchi massimi i cui piani siano due a due perpendicolari dividono evidentemente la superficie della sfera in otto triangoli trirettangoli.

§ 39.

La superficie convessa del cono circolare retto, quella di un tronco di esso a basi parallele, e quella del cilindro circolare retto sono tutte espresse dal prodotto dell'altezza per la circonferenza di raggio eguale alla perpendicolare innalzata sul mezzo della generatrice e terminata all'asse. La superficie generata dal perimetro di un semi-perimetro regolare di un numero pari di lati che si rivolge intorno al diametro del circolo circoscritto è eguale al prodotto di questo diametro per la circonferenza del circolo inscritto.

Teorema.

La superficie convessa del cono circolare retto, quella del tronco di esso a basi parallele, e quella del cilindro circolare retto sono tutte espresse dal prodotto dell'altezza per la circonferenza di raggio eguale alla perpendicolare innalzata sul mezzo della generatrice e terminata all'asse (fig. 236).

1.° Si indichi con S la superficie convessa di un cono la cui semi-sezione è SAC . Noi sappiamo che:

$$S = \frac{SA}{2} \times \text{circonf. } CA.$$

Sia quindi BD la perpendicolare elevata sul mezzo della generatrice SA e terminata all'asse. I triangoli rettangoli

SCA , SBD che hanno l'angolo S a comune saranno simili e perciò daranno la proporzione:

$$SB : SC :: BD : CA,$$

e siccome anche:

$$\text{circonf. } BD : \text{circonf. } CA :: BD : CA,$$

ne verrà che:

$$SB : SC :: \text{circonf. } BD : \text{circonf. } CA,$$

e fatto il prodotto dei medi eguale a quello degli estremi:

$$SB \times \text{circonf. } CA = SC \times \text{circonf. } BD,$$

e siccome:

$$SB = \frac{1}{2} SA,$$

$$S = \frac{1}{2} SA \times \text{circonf. } CA = SC \times \text{circonf. } BD.$$

2.° Sia $ABCD$ (fig. 237), la semi sezione del tronco di cono retto la cui superficie convessa indicheremo con S . Noi sappiamo che:

$$S = \frac{AB}{2} \times \text{circonf. } EL.$$

Ora tirata la EF perpendicolare sul mezzo della generatrice del tronco e AG parallela a CD , i triangoli ELF , ABG son simili come aventi i lati perpendicolari e perciò:

$$AB : AG :: EF : EL,$$

e siccome anche:

$$\text{circonf. } EF : \text{circonf. } EL :: EF : EL,$$

così:

$$AB : AG :: \text{circonf. } EF : \text{circonf. } EL,$$

donde fatto il prodotto dei medi eguale a quello degli estremi:

$$AB \times \text{circonf. } EL = AG \times \text{circonf. } EF = S.$$

3.° Pel cilindro di asse CC' (fig. 238) e generatrice BA il teorema è già dimostrato giacchè la perpendicolare EF sul mezzo della generatrice BA eguaglia il raggio della base.

Teorema.

La superficie di rivoluzione generata da un semi-poligono regolare di un numero pari di lati che si avvolge intorno al diametro del circolo circoscritto eguaglia il prodotto di questo diametro per la circonferenza del circolo inscritto (fig. 239).

Sia il semi-esagono $ABCD$ che ruota intorno al diametro AB del suo circolo circoscritto. I lati AB , BC , CD descriveranno dei coni, cilindri o tronchi di cono le cui superfici laterali si misureranno nel modo indicato dal teorema precedente. Osservando ora che le perpendicolari inalzate sulle metà delle rispettive generatrici concorrono tutte al centro O del poligono e sono eguali in lunghezza al raggio del circolo inscritto OS otterremo:

$$\text{sup. } AB = AE \times \text{circonf. } OG,$$

$$\text{sup. } BC = EF \times \text{circonf. } OG,$$

$$\text{sup. } CD = FD \times \text{circonf. } OG,$$

e perciò:

$$\text{sup. } ABCD = [AE + EF + FD] \text{ circonf. } OG,$$

ossia: $\text{sup. } ABCD = AD \times \text{circonf. } OG.$

§ 40.

La superficie di una sfera è eguale al prodotto del suo diametro per la circonferenza del suo circolo massimo. Le superfici di due sfere stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi. La superficie di una calotta e quella di una zona sferica sono ambe eguali al prodotto dell'altezza per la circonferenza di un circolo massimo.

Allorchè due piani paralleli tagliano una sfera si chiama *zona* la porzione di superficie sferica che essi comprendono. La zona ha per altezza la distanza dei due piani e per *basi* le sezioni fatte dai medesimi nella sfera. Una zona non ha che una base quando uno dei piani che la limitano è tangente alla sfera; in questo caso le si dà il nome particolare di *calotta*.

Fuso è la porzione di superficie sferica compresa fra due piani di circoli massimi. L'angolo di questi piani è l'angolo del fuso.

Unghia o *spicchio* è il solido compreso fra due piani di circoli massimi e il fuso che essi determinano sulla superficie della sfera. L'angolo del fuso è anche quello dell'unghia.

Segmento è la porzione della sfera compresa fra due piani paralleli. La sua *altezza* è la distanza di questi piani e le sezioni da essi fatte nella sfera ne sono le *basi*.

Se uno dei piani è tangente alla sfera il segmento ha una sola base.

Il volume generato da un settore circolare che ruota attorno ad un diametro dicesi *settore sferico*. Esso ha per base la zona descritta dall'arco del settore circolare.

Piramide sferica è la porzione della sfera contenuta in un angolo solido avente per vertice il centro. Il poligono sferico intercettato sulla superficie della sfera dalle faccie dell'angolo ne è la *base*.

Una piramide sferica può esser *triangolare*, *quadrangolare*, ec., a seconda del numero dei lati della sua base.

Un poliedro è *inscritto* in una sfera quando tutti i suoi vertici si trovano sulla superficie della sfera.

Un poliedro è *circoscritto* alla sfera quando ognuna delle sue faccie è tangente alla sfera.

Un cilindro o un cono sono inscritti in una sfera quando le circonferenze delle loro basi e il vertice si trovano sulla superficie sferica.

Invece il cilindro ed il cono son circoscritti alla sfera allorchè le loro sezioni condotte per l'asse son circoscritte a quella fatta nella sfera.

Teorema.

Una zona ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza di un circolo massimo (fig. 240).

1.° Consideriamo la zona ad una base generata dall'arco AB che si avvolge intorno al diametro AS . Si iscriva in quest'arco una linea poligona regolare $AEDB$ e si circo-

scriva una linea poligona regolare $LHG F$ simile alla prima. La superficie generata dalla linea inscritta è minore di quella della zona mentre quella generata dalla linea circoscritta è invece maggiore. Raddoppiando il numero dei lati dei poligoni una superficie cresce, mentre l'altra diminuisce e noi dimostreremo che hanno la zona per limite comune.

Siano difatto S , s le due superfici, noi sappiamo che:

$$s = AC \times \text{circonf. } ON.$$

Dalla figura si vede inoltre che:

$$S = \text{sup. } LHGF + \text{sup. } BF.$$

Ora: $\text{sup. } LHGF = LP \times \text{circonf. } OA,$

dunque: $S = LP \times \text{circonf. } OA + \text{sup. } BF.$

Quindi: $S - s = LP \times \text{circonf. } OA$
 $- AC \times \text{circonf. } ON + \text{sup. } BF.$

Aggiungiamo e sottraggiamo al secondo membro:

$$AC \times \text{circonf. } OA,$$

avremo:

$$S - s = (LP - AC) \times \text{circonf. } OA$$

$$+ (\text{circonf. } OA - \text{circonf. } ON) \times AC + \text{sup. } BF.$$

Se si suppone ora che il numero dei lati dei due poligoni raddoppi indefinitamente le variabili $LP - AC$, $\text{circonf. } OA - \text{circonf. } ON$ si avvicinano a zero insieme con la superficie laterale del tronco di cono generato da BF . Dunque $S - s$ tende verso zero e siccome la zona stà compresa fra S e s ne è il limite comune.

Ciò premesso le variabili s e $AC \times \text{circonf. } ON$ sempre eguali avendo per limiti rispettivi la zona e $AC \times \text{circonf. } OA$, questi limiti saranno eguali e così:

$$\text{zona} = AC \times \text{circonf. } OA.$$

2.° Abbiassi la zona a due basi generata dall'arco EB . Si osserverà che questa zona può esser considerata come la differenza delle due zone a una base AB e AE .

Ora avendo dimostrato che :

$$\text{zona } AB = AC \times \text{circonf. } OA,$$

$$\text{zona } AE = AT \times \text{circonf. } OA,$$

ne viene che :

$$\text{zona } BE = (AC - AT) \times \text{circonf. } OA = CT \times \text{circonf. } OA$$

Teorema.

La superficie di una sfera eguaglia il prodotto del suo diametro per la circonferenza di un circolo massimo (fig. 241).

Tagliata la sfera con un piano CD perpendicolare al diametro AB , avremo evidentemente :

$$\text{sup. sfera} = \text{zona } AC + \text{zona } CB,$$

Ma : $\text{zona } AC = \text{circonf. } OA \times AD,$

$$\text{zona } BC = \text{circonf. } OA \times BD,$$

quindi :

$$\text{sup. sfera} = \text{circonf. } OA [AD + BD] = \text{circonf. } OA \times AB.$$

SCOLIO 1.° Detta S la superficie sferica R il raggio, siccome una circonferenza di un circolo massimo è eguale a $2\pi R$ avremo :

$$S = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2,$$

vale a dire che :

La superficie sferica è il quadruplo di quella di un circolo massimo.

ESEMPIO. Essendo 2^m il raggio della sfera, la sua superficie sarà :

$$4 \times 3,14 \times 4 = 50^m, 24.$$

SCOLIO 2.° Detto D il diametro della sfera siccome :

$$R = \frac{1}{2} D, \quad R^2 = \frac{D^2}{4},$$

e perciò :

$$S = \pi D^2;$$

formula che dà la superficie sferica in funzione del diametro.

SCOLIO 3.° Il triangolo tri-rettangolo essendo l'ottava parte della superficie sferica sarà espresso indifferentemente da :

$$\frac{\pi R^2}{2}, \text{ oppure } \frac{\pi D^2}{8}.$$

COROLLARIO. *Le superfici di due sfere stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi.*

Siano S , S' le superfici di due sfere aventi per raggio rispettivo R , R' ; noi avremo:

$$S = 4\pi R^2,$$

$$S' = 4\pi R'^2,$$

e perciò:

$$S : S' :: R^2 : R'^2.$$

§ 41.

Il fuso sferico sta alla superficie della sfera come l'angolo del fuso sta a quattro retti: quindi la superficie di un fuso sferico è eguale al prodotto del diametro della sfera per l'arco del circolo massimo che misura l'angolo del fuso. La superficie di un triangolo sferico è eguale all'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due retti se si prende per unità di superficie quella del triangolo trirettangolo e per unità di angolo l'angolo retto.

Teorema.

Il rapporto di un fuso alla superficie sferica eguaglia quello dell'angolo del fuso a quattro retti (fig. 242).

Sia il fuso $ACBD$ determinato dalle due mezze circonferenze massime ACB , ADB . Dal punto A come polo descritta la circonferenza DFG avremo nell'arco DF la misura dell'angolo del fuso.

Suppongasi ora primieramente che l'arco DF e la circonferenza abbiano una comune misura che entri, per esempio, tre volte in DF e 20 nella circonferenza. Riportata sulla circonferenza questa comune misura per ogni punto di divisione e per la AB si conducano dei piani; avremo così scompartita la superficie sferica in 20 fusi eguali dei quali il fuso $ACBD$ ne conterrà 3. Il rapporto adunque di questo fuso alla superficie sferica sarà di 3 a 20 vale a dire eguale a quello dell'arco DF alla circonferenza o in altri termini eguale a quello dell'angolo del fuso a 4 retti.

Se l'arco DF e la circonferenza fossero incommensurabili si ripeterebbe la dimostrazione data più volte per casi consimili.

COROLLARIO 1.° *L'unghia sferica sta alla sfera come l'angolo del fuso a 4 retti. Si dimostra in modo identico.*

COROLLARIO 2.° Sia R il raggio della sfera e A il rapporto dell'angolo del fuso a un retto, avremo:

$$\frac{\text{Fuso}}{4 \pi R^2} = \frac{A}{4},$$

e perciò: $\text{fuso} = \pi R^2 A,$

vale a dire che:

La superficie del fuso eguaglia il prodotto dell'area di un circolo massimo pel rapporto dell'angolo del fuso a un angolo retto.

COROLLARIO 3.° La proporzione dimostrata potendo anche scriversi:

$$\text{fuso} : 2R \times 2\pi R :: M : 2\pi R,$$

ove M indica l'arco di circolo DF che misura l'angolo del fuso ne viene:

$$\text{fuso} = 2RM,$$

ossia la superficie del fuso sferico eguaglia il prodotto del diametro della sfera per l'arco di circolo massimo che misura l'angolo del fuso.

ESEMPIO. Sia $R = 2^m$, e l'angolo del fuso di 30° ; si avrà che la circonferenza di circolo massimo risulterà di:

$$2 \times 3,14 \times 2 = 12^m,56,$$

l'arco di 30° di: $\frac{12,56}{12} = 1^m,05,$

e perciò: $\text{fuso} = 4 \times 1,05 = 4^m,20.$

Si dice che due triangoli sferici sono *simmetrici* quando hanno lati ed angoli rispettivamente eguali, ma non similmente disposti. Ond'è che i due triangoli sovrapposti non coincidono.

Teorema.

Due triangoli sferici simmetrici sono equivalenti (fig. 243).

Sieno ABC , $A'B'C'$ due triangoli sferici simmetrici che hanno l'angolo $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ e i lati $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

Se i due triangoli ABC , $A'B'C'$ fossero isosceli sarebbero eguali perchè essendo i quattro lati AB , AC , $A'B'$, $A'C'$ tutti eguali fra loro la sovrapposizione riesce possibile. Ma generalmente questa condizione non si verifica. Allora si determini il polo P del circolo minore che passa per i tre punti A , B , C , e lo si unisca a questi punti con gli archi di circolo massimo PA , PB , PC naturalmente eguali fra loro per guisa che i tre triangoli PAB , PAC , PBC nei quali si decompone ABC son tutti isosceli. Si conduca quindi nell'angolo A' un arco di circolo massimo che faccia con $A'B'$ l'angolo $P'A'B' = PAB$ e si prenda la lunghezza $P'A' = PA$, riunendo quindi sulla superficie sferica con archi di circolo massimo il punto P' a B' e C' . I triangoli PAB , $P'A'B'$ avendo gli elementi eguali ma disposti in ordine inverso sono simmetrici e perciò essendo il primo isoscele lo sarà pure il secondo, ond'è che saranno anche eguali. La stessa dimostrazione può ripetersi pei due triangoli PAC , $P'A'C'$ e da ciò ne viene che essendo $PB = P'B' = PC = P'C'$ anche i triangoli isosceli PCB , $P'C'B'$ saranno eguali.

Perciò in definitiva i triangoli ABC , $A'B'C'$ composti di parti eguali diversamente aggruppate saranno equivalenti.

SCOLIO. Noi abbiám supposto che il punto P cadesse entro il triangolo ABC , ma la dimostrazione riuscirebbe identica ove cadesse invece al di fuori o sopra uno dei lati del triangolo.

COROLLARIO. *Due triangoli sferici che hanno un angolo opposto al vertice e in cui i lati opposti a quest'angolo son situati sulla stessa circonferenza formano insieme il fuso che ha l'angolo eguale a quello opposto al vertice nei triangoli (fig. 244).*

Sieno ABC , DBE i due triangoli, si ha evidentemente:

$$\text{fuso } B = ABC + AFC.$$

Ma il triangolo AFC è simmetrico e perciò equivalente a DBE . Dunque:

$$\text{fuso } B = ABC + DBE.$$

Teorema.

L'area del triangolo sferico stà a quella dell'intera superficie sferica come il suo eccesso sferico stà a otto angoli retti (fig. 245).

Sia ABC il dato triangolo sferico. Si prolunghino i suoi lati AB , BC fino ad incontrare un'altra volta la circonferenza del terzo; ne verrà:

$$\text{fuso } C = ABC + ABD,$$

$$B = ABC + ACE,$$

$$A = ABC + DAE.$$

Sommando membro a membro ed osservando che la somma dei quattro triangoli ABC , ABD , ACE , ADE eguaglia la superficie di un emisfero, ne viene:

$$\text{fuso } A + \text{fuso } B + \text{fuso } C = 2 ABC + \frac{1}{2} \text{ sup. sfer.},$$

e quindi:

$$ABC = \frac{\text{fuso } A + \text{fuso } B + \text{fuso } C}{2} - \frac{1}{4} \text{ sup. sfer.},$$

dividendo da ambo i lati dell'equazione per la superficie della sfera e rimpiazzando il rapporto di ogni fuso a questa superficie con quello dell'angolo del fuso a 4 retti, avremo indicando tali rapporti con A , B , C , che:

$$\frac{ABC}{\text{sup. sfer.}} = \frac{A + B + C - 2}{8},$$

come si voleva dimostrare.

COROLLARIO. *Se si prende per unità di superficie il triangolo trirettangolo, sup. sfer. = 8 e perciò si ottiene:*

$$ABC = A + B + C - 2,$$

vale a dire che la superficie di un triangolo sferico eguaglia il suo eccesso sferico quando si prende per unità di superficie il triangolo sferico trirettangolo e per unità di angolo l'angolo retto.

ESEMPIO. Sia nella sfera di raggio 2^m un triangolo sferico i di cui angoli sono rispettivamente di 40°, 80°, 120°; avremo prima di tutto per la superficie sferica:

$$4 \times 3, 14 \times 4 = 50^{\text{mq}}, 24,$$

e perciò pel triangolo trirettangolo :

$$\frac{50,24}{8} = 6^{\text{mq}}, 28.$$

Indi :

$$A = \frac{40}{90} = \frac{4}{9},$$

$$B = \frac{80}{90} = \frac{8}{9},$$

$$C = \frac{120}{90} = \frac{12}{9},$$

e perciò : $A + B + C - 2 = \frac{24}{9} - 2 = \frac{2}{3},$

e così la superficie del triangolo sarà i $\frac{2}{3}$ di 6,28, e fatti i calcoli 4^{mq}, 18.

§ 42.

Il volume di una sfera è eguale al prodotto della sua superficie per il terzo del suo raggio. I volumi di due sfere stanno fra loro come i cubi dei loro raggi. Il volume di un settore sferico è eguale al prodotto della sua calotta pel terzo del raggio della sfera. Il volume di uno spicchio sferico è eguale al prodotto della superficie del suo fuso pel terzo del raggio della sfera. Il volume di una piramide sferica è eguale al prodotto della sua base pel terzo del raggio della sfera. Il volume di un poliedro circoscritto ad una sfera è eguale al prodotto della sua superficie per il terzo del raggio della sfera.

Teorema.

Il volume generato dalla rivoluzione di un triangolo attorno ad un asse posto nel suo piano e che passa per uno dei suoi vertici eguaglia il prodotto della superficie generata dal lato opposto a quel vertice per il terzo dell'altezza corrispondente.

Possono darsi tre casi, cioè: 1.° l'asse di rotazione si confonde con uno dei lati del triangolo; 2.° il lato opposto al vertice in quistione incontra l'asse; 3.° gli è invece parallelo.

1.° Sia ABC (fig. 246) il triangolo e xy l'asse. Il volume generato dal detto triangolo è eguale alla somma dei due coni retti generati dai triangoli rettangoli CAE , BCE , ora si sa che:

$$\text{cono } CAE = \frac{1}{3} \pi \overline{CE}^2 \times AE,$$

$$\text{cono } BCE = \frac{1}{3} \pi \overline{CE}^2 \times BE;$$

quindi: $\text{vol. } ABC = \frac{1}{3} \pi \overline{CE}^2 \times AB.$

Ma $CE \times AB = BC \times AD$, giacchè ambedue queste espressioni sono il doppio dell'area del triangolo ABC , quindi può anche dirsi che:

$$\text{vol. } ABC = \frac{1}{3} \pi CE \times BC \times AD.$$

Ora la superficie generata dalla retta BC essendo quella laterale di un cono, si ha:

$$\text{sup. } BC = 2 \pi \frac{BC \times CE}{2},$$

indi: $\text{vol. } ABC = \frac{2}{3} AD \times \text{sup. } BC.$

2.° Prolungando BC (*fig. 247*) fino all'incontro dell'asse XY , il triangolo ABC risulterà la differenza dei due triangoli CAE , BAE e quindi il volume che esso genera sarà pure la differenza dei volumi generati dai detti triangoli. E siccome ciascun di essi si trova nelle condizioni indicate nel primo caso, avremo:

$$\text{vol. } CAE = \frac{1}{3} AD \times \text{sup. } CE,$$

$$\text{vol. } BAE = \frac{1}{3} AD \times \text{sup. } BE,$$

e perciò:

$$\begin{aligned} \text{vol. } BAC &= \frac{1}{3} AD [\text{sup. } CE - \text{sup. } BE] = \\ &= \frac{1}{3} AD \times \text{sup. } BC. \end{aligned}$$

3.° Se il lato BC (*fig. 248*) è parallelo all'asse xy , il cono retto generato dal triangolo ABF è il terzo del cilindro retto generato dal rettangolo $AFBD$, dunque il volume generato dal triangolo ABD è i due terzi del detto cilindro. Similmente il volume generato dal triangolo ADC sarà i due terzi del cilindro retto generato dal rettangolo $AECD$ e così in complesso il volume generato dal triangolo ABC risulta eguale ai due terzi del cilindro retto generato dal rettangolo totale $CBFE$. Ora il volume di questo cilindro essendo:

$$\pi \overline{AD}^2 \times BC,$$

avremo: $\text{vol. } ABC = \frac{2}{3} \pi \overline{AD}^2 \times BC.$

Ma si sa anche che:

$$\text{sup. } BC = 2 \pi AD \times BC,$$

quindi: $\text{vol. } ABC = \frac{1}{3} AD \times \text{sup. } BC.$

COROLLARIO. Quando il triangolo è isoscele (*fig. 249*), tirate le rette BE , CF perpendicolari all'asse si sa che:

$$\text{sup. } BC = EF \times \text{circ. } AD,$$

indi: $\text{vol. } ABC = \frac{1}{3} AD \times EF \times \text{circ. } AD,$

ed essendo: $\text{circ. } AD = 2 \pi AD,$

$$\text{vol. } ABC = \frac{2}{3} \pi \overline{AD}^2 \times EF.$$

Dunque il volume generato dalla rivoluzione di un triangolo isoscele attorno ad un asse che passa pel suo vertice è eguale ai due terzi del prodotto della proiezione della sua base sull'asse pel circolo che ha per raggio l'altezza del triangolo.

Teorema.

*Il volume generato da un settore poligono regolare che ruota attorno a un diametro esterno si misura pel prodotto della superficie generata dal suo perimetro pel terzo del raggio del circolo inscritto (*fig. 250*).*

Sia $OABCD$ il settore poligono. Il volume generato da questo settore può considerarsi come la somma di quelli generati dai triangoli OAB , OBC , ec. Ora si sa che:

$$\text{vol. } OAB = \text{sup. } AB \times \frac{1}{3} OM,$$

$$\text{vol. } OBC = \text{sup. } BC \times \frac{1}{3} OM,$$

$$\text{vol. } OCD = \text{sup. } OD \times \frac{1}{3} OM,$$

dunque sommando:

$$\text{vol. } OABCD = \frac{1}{3} OM \times [\text{sup. } AB + \text{sup. } BC + \text{sup. } CD],$$

$$\text{ossia: } \text{vol. } OABCD = \frac{1}{3} OM \times \text{sup. } ABCD.$$

COROLLARIO. Condotte le rette AE , DF perpendicolari all'asse sappiamo che:

$$\text{sup. } ABCD = EF \times \text{circ. } OM,$$

indi sostituendo nel volume trovato:

$$\text{vol. } OABCD = \frac{1}{3} OM \times EF \times \text{circ. } OM,$$

è siccome: $\text{circ. } OM = 2\pi OM,$

$$\text{vol. } OABCD = \frac{2}{3} \pi \overline{OM}^2 \times EF.$$

Il volume generato da un settore poligono regolare che ruota attorno a un diametro esterno è dunque eguale ai due terzi del prodotto dell'area del circolo inscritto per la proiezione della linea poligona sull'asse di rotazione.

Teorema.

Il volume di un settore sferico eguaglia il prodotto della sua zona pel terzo del raggio (fig. 251).

1.° Considereremo primieramente il settore sferico generato dalla rivoluzione del settore circolare OAD intorno al diametro OA .

Si inscriva nell'arco AD una linea poligona regolare e si circoscriva un'altra linea poligona regolare simile alla prima. Il volume generato dal settore poligono $OABCD$ è più piccolo del settore sferico mentre quello generato dal settore $OFGH$ è invece più grande. Raddoppiando indefinitamente il numero dei lati dei poligoni inscritti e circoscritti, dimostreremo dapprima che il settore sferico è il limite comune dei due settori poligonal.

Si indichino questi due settori con V , v , avremo:

$$V = \text{sup. } EFGH \times \frac{1}{3} OL,$$

$$v = \text{sup. } ABCD \times \frac{1}{3} OM,$$

e sottraendo:

$$V - v = \text{sup. } EFGH \times \frac{1}{3} OL - \text{sup. } ABCD \times \frac{1}{3} OM.$$

Aggiungendo e sottraendo nel secondo membro la quantità $\text{sup. } ABCD \times \frac{1}{3} OL$, si ha:

$$V - v = [\text{sup. } EFGH - \text{sup. } ABCD] \times \frac{1}{3} OL + \text{sup. } ABCD \left[\frac{1}{3} OL - \frac{1}{3} OM \right].$$

Ora col raddoppio consecutivo dei lati dei poligoni le variabili $\frac{1}{3} OL - \frac{1}{3} OM$, $\text{sup. } EFGH - \text{sup. } ABCD$ hanno per limite zero, dunque è lo stesso della quantità $V - v$. E siccome il settore sferico stà sempre compreso fra i volumi V e v ne sarà il limite comune.

Ciò posto le variabili V e $\text{sup. } EFGH \times \frac{1}{3} OL$ che hanno per limite il settore sferico e zona $AD \times \frac{1}{3} OL$ essendo sempre eguali lo saranno pure i loro limiti e perciò:

$$\text{sett. sfer. } OAD = \text{zona } AD \times \frac{1}{3} OL.$$

2.° Sia il settore sferico generato dal settore circolare ODL che ruota attorno al diametro esterno OA ; noi abbiamo per ciò che dimostrammo:

$$\text{sett. sfer. } OAD = \text{zona } AD \times \frac{1}{3} OL,$$

$$\text{sett. sfer. } OAL = \text{zona } AL \times \frac{1}{3} OL,$$

quindi sottraendo membro a membro ne viene:

$$\text{sett. sfer. } ODL = \frac{1}{3} OL [\text{zona } AD - \text{zona } AL],$$

$$\text{ossia: } \text{sett. sfer. } ODL = \frac{1}{3} OL \times \text{zona } LD,$$

il che prova l'enunciato teorema in tutta la sua generalità.

Teorema.

Il volume di una sfera è eguale al prodotto della sua superficie pel terzo del raggio (fig. 252).

Se si taglia la sfera con un piano CD perpendicolare al diametro AB , avremo evidentemente.

$$\text{sfera } O = \text{sett. sf. } COA + \text{sett. sf. } COB.$$

Ma: sett. sf. $COA = \text{zona } CA \times \frac{1}{3} OC,$

sett. sf. $COB = \text{zona } CB \times \frac{1}{3} OC,$

indi: sfera $= \frac{1}{3} OC [\text{zona } CA + \text{zona } CB].$

ossia: sfera $O = \frac{1}{3} OC \times \text{sup. sfer.}$

COROLLARIO 1.° Detto R il raggio della sfera si ha:

$$\text{sup. sf.} = 4\pi R^2,$$

indi: sfera $= \frac{4}{3} \pi R^3.$

COROLLARIO 2.° Detto D il diametro della sfera si ha:

$$R = \frac{1}{2} D \text{ e } R^3 = \frac{D^3}{8},$$

indi: sfera $= \frac{\pi D^3}{6}.$

ESEMPIO. Sia una sfera di raggio 2^m ; avremo pel suo volume:

$$\frac{4}{3} \times 3,14 \times 8 = 33^m, 49.$$

COROLLARIO 3.° I volumi di due sfere stanno fra loro come i cubi dei raggi.

Sieno V, V' i volumi di due sfere di raggio R, R' ; avremo:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, V' = \frac{4}{3} \pi R'^3,$$

e perciò: $V : V' :: R^3 : R'^3.$

SCOLIO. I raggi di due sfere crescendo come i numeri 1, 2, 3, ec., le loro superfici crescono come 1, 4, 9, ec., e i volumi come 1, 8, 27, ec.

Teorema.

Il volume di uno spicchio o unghia sferica è eguale al prodotto della superficie del suo fuso pel terzo del raggio.

Detto U il volume di un' unghia il cui fuso è F noi sappiamo che le unghie e i fusi son proporzionali perchè crescenti nel rapporto dei loro angoli. Paragonando dunque

l'unghia U alla sfera ed il fuso F alla superficie sferica, otterremo :

$$U : F :: \text{sfera} : \text{sup. sf.}$$

Detto R il raggio della sfera siccome :

$$\text{sfera} = \frac{R}{3} \times \text{sup. sf.},$$

dovrà essere :

$$U = \frac{R}{3} \times F.$$

Due piramidi sferiche sono *simmetriche* quando per basi hanno dei triangoli sferici simmetrici e sono nella medesima sfera.

Teorema.

Due piramidi sferiche triangolari simmetriche sono equivalenti.

Si dimostra al modo stesso di quel che fu fatto per i triangoli.

COROLLARIO. *Due piramidi sferiche triangolari che hanno un diedro opposto al vertice e le faccie opposte a quel diedro sullo stesso piano sommate insieme formano l'unghia che ha per angolo il diedro considerato.*

Si dimostra come il corollario del teorema sopra citato.

Teorema.

Il volume di una piramide sferica triangolare eguaglia il prodotto della superficie della sua base pel terzo del raggio della sfera (fig. 254).

Sia $OABC$ la piramide data. Si ha evidentemente :

$$OABC + OBCD = \text{unghia } A,$$

$$OABC + OACE = \text{unghia } B,$$

$$OABC + OCDE = \text{unghia } C.$$

Sommando membro a membro ed osservando che le quattro piramidi $OABC$, $OBCD$, $OACE$, $OCDE$ fanno insieme il volume di un emisfero, avremo :

$$2 OABC + \frac{1}{2} \text{ sfera} = \text{unghia } A + \text{unghia } B + \text{unghia } C.$$

donde:

$$OABC = \frac{1}{2} [\text{unghia } A + \text{unghia } B + \text{unghia } C] \\ - \frac{1}{4} \text{ sfera.}$$

Ora si ha:

$$\text{unghia } A = \frac{1}{3} OA \times \text{fuso } A,$$

$$\text{unghia } B = \frac{1}{3} OA \times \text{fuso } B,$$

$$\text{unghia } C = \frac{1}{3} OA \times \text{fuso } C,$$

e perciò sostituendo risulta:

$$OABC = \frac{1}{6} OA [\text{fuso } A + \text{fuso } B + \text{fuso } C] \\ - \frac{1}{4} \text{ sfera.}$$

$$\text{Ma:} \quad \text{sfera} = \frac{1}{3} OA \times \text{sup. sf.}$$

Quindi:

$$OABC = \frac{1}{3} OA \left[\frac{\text{fuso } A + \text{fuso } B + \text{fuso } C}{2} - \frac{\text{sup. sfer.}}{4} \right],$$

o anche per un cognito teorema (vedi § 41):

$$OABC = \frac{1}{3} OA \times \text{triangolo } ABC.$$

Teorema.

Il volume di una piramide sferica qualunque è eguale al prodotto della sua base pel terzo dell'altezza (fig. 255).

Sia la piramide $OABCDE$. Condotti gli archi di circoli massimi AC , AD , si scomporrà la piramide data in piramidi triangolari aventi per basi i triangoli sferici nei quali si decompone il poligono $ABCDE$. Quindi:

$$OABCDE = OABC + OACD + OADE.$$

Ma pel teorema precedente:

$$OABC = ABC \times \frac{1}{3} OA,$$

$$OACD = ACD \times \frac{1}{3} OA,$$

$$OADE = ADE \times \frac{1}{3} OA.$$

tirato ora il raggio OB nel triangolo rettangolo ODB , si ha:

$$\overline{BD}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OD}^2,$$

ossia:
$$b^2 = R^2 - \overline{OD}^2.$$

Ma:
$$OD = OE - DE = R - c,$$

quindi:
$$\overline{OD}^2 = R^2 + c^2 - 2Rc.$$

Sostituendo nel valore di b^2 viene:

$$b^2 = 2Rc - c^2.$$

e portando questo valore di b^2 nel volume V :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi c}{2} (2Rc - c^2) + \frac{\pi c^3}{6} = \pi Rc^2 - \frac{\pi c^3}{2} + \frac{\pi c^3}{6} \\ &= \pi Rc^2 - \frac{c^3 \pi}{3} = \pi c^2 \left(R - \frac{c}{3} \right), \end{aligned}$$

il che prova come:

Il volume del segmento sferico ad una base è equivalente a quello di un cilindro che avesse per raggio di base l'altezza del segmento e per altezza la differenza fra il raggio della sfera e il terzo dell'altezza del segmento.

§ 44.

Rapporti tra i volumi di una sfera, del cilindro equilatero circoscritto e del cono equilatero circoscritto; i rapporti delle superfici di questi solidi sono eguali a quelli dei loro volumi. Rapporti fra i volumi di una sfera, del cilindro equilatero inscritto e del cono equilatero inscritto.

Teorema.

I volumi di una sfera, del cilindro e cono equilatero circoscritto alla medesima stanno fra loro come i numeri 4, 6, 9.

Le superfici totali stanno fra loro nello stesso rapporto (fig. 258).

1.° Fatte delle sezioni nei tre solidi mediante un piano che passa per l'asse del cilindro e del cono e detto R il raggio della sfera, sarà R il raggio di base e $2R$ l'altezza del cilindro. Il raggio GC della base del cono sarà metà del lato del triangolo equilatero circoscritto al cerchio massimo O , vale a dire si esprimerà con $R\sqrt{3}$. L'altezza SG del detto cono si valuterà mediante il triangolo rettangolo SGE in cui:

$$\overline{SG}^2 = \overline{SE}^2 - \overline{GE}^2,$$

ossia:
$$\overline{SG}^2 = 12R^2 - 3R^2 = 9R^2,$$

donde:
$$SG = 3R.$$

Ciò premesso avremo:

$$\text{volume sfera} = \frac{4\pi R^3}{3},$$

$$\text{volume cilindro} = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3,$$

$$\text{volume cono} = \pi \frac{(R\sqrt{3})^2}{3} \times 3R = 3\pi R^3.$$

Quindi:
$$\text{sfera} : \text{cilindro} : \text{cono} :: \frac{4}{3} : 2 : 3,$$

ossia:
$$\text{sfera} : \text{cilindro} : \text{cono} :: 4 : 6 : 9.$$

2.° Le superfici totali dei tre solidi saranno date da:

$$\text{sup. sfera} = 4\pi R^2,$$

$$\text{sup. cil.} = 2R \times 2\pi R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2,$$

$$\text{sup. cono} = \frac{2R\sqrt{3}}{2} \times 2\pi R\sqrt{3} + 3\pi R^2 = 9\pi R^2.$$

Indi:
$$\text{sup. sf.} : \text{sup. cil.} : \text{sup. cono} :: 4 : 6 : 9.$$

COROLLARIO. Osservando che il numero 6 è medio proporzionale fra 4 e 9 se ne deduce.

1.° *Il volume del cilindro retto circoscritto alla sfera è medio proporzionale fra quelli della sfera e del cono equilatero pure circoscritto;*

2.° *La superficie totale del cilindro retto circoscritto ad una sfera è media proporzionale fra le superfici della sfera e del cono equilatero pure circoscritto.*

Teorema.

I volumi e le superfici totali della sfera, del cilindro equilatero e del cono equilatero inscritto stanno fra loro i primi come i numeri 32, $12\sqrt{2}$ e 9 e le seconde come 4, 3 e $\frac{9}{4}$ (fig. 259).

1.° Condotta per l'asse del cono e del cilindro un piano che produrrà delle sezioni nei tre solidi e detto R il raggio della sfera, avremo che l'altezza del cilindro sarà eguale al lato del quadrato inscritto nel circolo massimo cioè a $R\sqrt{2}$ il raggio della base sarà poi:

$$\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Quanto al cono la cui sezione è BAC avrà la generatrice AB eguale al lato del triangolo equilatero inscritto nel circolo O , cioè espressa da $R\sqrt{3}$; il suo raggio di base sarà $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ e la sua altezza AL si dedurrà dal triangolo rettangolo ABL , in cui:

$$\overline{AL}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BL}^2,$$

ossia:
$$\overline{AL}^2 = 3R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{9R^2}{4},$$

donde:
$$AL = \frac{3R}{2}.$$

Ciò premesso avremo:

$$\text{volume sfera} = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$\text{vol. cilindro} = \frac{\pi R^2}{2} \times R\sqrt{2} = \frac{\pi R^3}{\sqrt{2}},$$

$$\text{vol. cono} = \frac{1}{3} \pi \frac{3R^2}{4} \times \frac{3R}{2} = 3 \frac{\pi R^3}{8}.$$

Quindi:
$$\text{sfera} : \text{cilindro} : \text{cono} :: \frac{4}{3} : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{3}{8},$$

$$\text{sfera} : \text{cil.} : \text{cono} :: 32 : 12\sqrt{2} : 9.$$

2.° Le superfici totali dei tre solidi saranno:

per la sfera: $4 \pi R^2$,

pel cilindro: $\frac{2 \pi R}{\sqrt{2}} \times R \sqrt{2} + \frac{2 \pi R^2}{2} = 3 \pi R^2$,

pel cono: $\frac{2 \pi R \sqrt{3}}{2} \times \frac{R \sqrt{3}}{2} + \frac{3 \pi R^2}{4} = \frac{9 \pi R^2}{4}$.

Quindi: sup. sf. : sup. cil. : sup. con. :: 4 : 3 : $\frac{9}{4}$.

COROLLARIO. Osservando che il numero $12 \sqrt{2}$ è medio proporzionale fra 32 e 9 e che l'altro numero 3 è pure medio proporzionale fra 4 e $\frac{9}{4}$, ne consegue:

1.° *Il volume del cilindro equilatero inscritto alla sfera è medio proporzionale fra quelli della sfera e del cono equilatero inscritto;*

2.° *La superficie totale del cilindro equilatero inscritto nella sfera è media proporzionale fra le superfici della sfera e del cono equilatero pure inscritto.*

§ 45.

Ad ogni poliedro regolare si può circoscrivere ed in ognuno di essi si può inscrivere una sfera. Il volume di un poliedro regolare è eguale al prodotto della sua superficie pel terzo del raggio della sfera inscritta. Due poliedri regolari dello stesso numero di faccie sono simili, quindi le loro superfici stanno fra loro come i quadrati dei loro lati o dei raggi delle sfere inscritte e circoscritte; ed i loro volumi stanno fra loro come i cubi delle stesse linee.

Teorema.

Ad ogni poliedro regolare si può inscrivere e circoscrivere una sfera (fig. 260).

Sieno C , C' i centri di due faccie adiacenti del poliedro che si intersecano secondo lo spigolo AB ; il piano CMC' che passa pei due centri e per la metà di quella costola è perpendicolare alle due faccie adiacenti e perciò se dai punti C , C' si elevano due rette perpendicolari alle stesse faccie esse si troveranno in quel piano e si incontreranno perciò in un punto O . Vogliamo ora provare che questo punto è

equidistante tanto da tutte le faccie del poliedro, come da tutti i suoi vertici.

1.° I triangoli rettangoli CMO , $C'MO$ essendo eguali per avere l'ipotenusa e un cateto eguale daranno $CO = C'O$ e di più $CMO = C'MO$. Sia ora C'' il centro di una terza faccia adiacente a CAB e intersecantela secondo lo spigolo DE , si tiri OC'' . Il piano OCN perpendicolare sulla metà della DE contiene $C''N$ nel medesimo. Inoltre i triangoli rettangoli OCM , OCN sono eguali per avere un angolo retto compreso fra lati eguali, dunque l'angolo $CNO = CMO$ e perciò eguale alla metà del diedro DE , giacchè il solido è regolare e l'angolo CNC'' misura appunto quel diedro. Ond'è che saranno anche eguali i triangoli OCN , $OC''N$ per avere due lati e l'angolo compreso eguale e perciò $OC'' = OC$ e l'angolo $OC''N$ è retto, vale a dire la OC'' è perpendicolare sulla faccia $C'DE$ e il punto O è equidistante dalle tre faccie considerate.

Lo stesso potendo dimostrarsi per tutte le altre ne consegue che se si fa centro in O e con raggio OC si immagina descritta una superficie sferica, essa sarà tangente internamente a tutte le faccie del poliedro, vale a dire gli sarà inscritta.

2.° Unito il punto O con tutti i vertici del poliedro le rette OA , OB , ec., saranno eguali come oblique equidistanti da perpendicolari eguali. E perciò la sfera che ha per centro O e per raggio OA è circoscritta al poliedro.

SOLIO. Il punto O si chiama il *centro* del poliedro; OA il suo *raggio* ed OC l'*apotema*.

COROLLARIO. *Il volume del poliedro regolare eguaglia il prodotto della sua superficie pel terzo del raggio della sfera inscritta.*

Detto F , F' , F'' , ec. le faccie del poliedro; se lo si decompone in piramidi aventi per basi queste faccie e per vertice comune il suo centro, l'altezza di ogni piramide sarà eguale al raggio r della sfera inscritta e perciò i loro volumi resulteranno:

$$\frac{Fr}{3}, \frac{F'r}{3}, \frac{F''r}{3}, \text{ec.},$$

e quindi il volume totale del poliedro sarà:

$$V = \frac{r}{3} (F + F' + F'', \text{ ec.})$$

Teorema.

Due poliedri regolari dello stesso numero di faccie son simili. Le loro superfici stanno fra loro come i quadrati dei loro spigoli, raggi o apotemi e i loro volumi come i cubi di queste linee (fig. 261).

1.° Due faccie omologhe dei due poliedri son simili perchè poligoni regolari dello stesso numero di lati. Due angoli solidi omologhi devono pure essere eguali come formati di angoli piani eguali e similmente disposti.

2.° Detti L, l gli spigoli omologhi e S, s le superfici dei poliedri si sa che:

$$S : s :: L^3 : l^3.$$

Ora se O, O' rappresentano i centri dei due poliedri, C, C' quelli di due faccie omologhe e $CA, C'A'$ le metà degli spigoli L, l , la similitudine dei triangoli rettangoli $OAC, O'A'C'$ somministra:

$$\frac{L}{2} : \frac{l}{2} :: OC : O'C' :: OA : O'A'.$$

E perciò chiamati R, R' i raggi e r, r' gli apotemi dei due poliedri ne viene:

$$L^3 : l^3 :: R^3 : R'^3 :: r^3 : r'^3,$$

e perciò: $S : s :: L^3 : l^3 :: R^3 : R'^3 :: r^3 : r'^3.$

3.° Detti V, v i volumi dei poliedri si ha, per la loro similitudine:

$$V : v :: L^3 : l^3,$$

e quindi anche:

$$V : v :: L^3 : l^3 :: R^3 : R'^3 :: r^3 : r'^3.$$

SOLIO. Accenneremo qui senza dimostrarlo che esistono cinque poliedri regolari convessi, cioè:

- 1.° Il tetraedro;
- 3.° L'ottaedro;
- 3.° L'icosaedro.

Questi tre hanno per faccie dei triangoli equilateri.

- 4.° Il cubo o esaedro che ha le faccie quadrate;
- 5.° Il dodecaedro che ha per faccie dei pentagoni convessi.

§ 46.

Risoluzione analitica di problemi relativi alle diverse parti della geometria solida.

Noi daremo qui alcuni esempi di simili soluzioni.

Problema.

Calcolare a meno di un centimetro le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sapendo che son proporzionali ai numeri $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$ e che il suo volume è eguale a 2 metri cubi.

Dette x , y , z le tre dimensioni del parallelepipedo, dovremo prima di tutto avere:

$$x : y : z :: \frac{2}{3} : \frac{4}{5} : \frac{3}{4},$$

e perciò:

$$y = \frac{\frac{4}{5} x}{\frac{2}{3}} = \frac{6x}{5},$$

$$z = \frac{\frac{3}{4} x}{\frac{2}{3}} = \frac{9x}{8}.$$

Il volume del parallelepipedo essendo poi misurato dal prodotto xyz , si avrà:

$$xyz = 2^m,$$

ossia sostituendo per y e z i loro valori:

$$\frac{54}{40} x^3 = 2,$$

e perciò: $x^3 = \frac{80}{54} = 1,481481$ circa,

e perciò: $x = \sqrt[3]{1,481481},$

e fatti i calcoli: $x = 1^m, 13,$

quindi: $y = \frac{6x}{5} = 1^m, 35$

e: $z = \frac{9x}{8} = 1^m, 27.$

Problema.

Determinare l'altezza a cui deve tagliarsi una piramide con un piano parallelo alla base per modo da dividerla in due parti equivalenti.

Sia A l'altezza, B la base della piramide data, x l'altezza incognita e y l'altra base del tronco determinato. Le sezioni fatte in una piramide da piani paralleli essendo proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice, avremo:

$$B : y :: A^2 : x^2,$$

indi: $y = \frac{B x^2}{A^2}.$

Ora il volume della piccola piramide sarà dunque:

$$\frac{yx}{3} = \frac{B x^3}{3 A^2},$$

e quello del tronco risulterà:

$$\frac{1}{3} (A - x) \left(B + \frac{B x^3}{A^2} + \frac{B x}{A} \right).$$

Onde si verifichi adunque la condizione del problema, dovrà aversi:

$$\frac{B x^3}{3 A^2} = \frac{1}{3} (A - x) \left(B + \frac{B x^3}{A^2} + \frac{B x}{A} \right).$$

Sviluppando:

$$\frac{B x^3}{3 A^2} = \frac{A B}{3} + \frac{B x^2}{3 A} + \frac{B x}{3} - \frac{B x}{3} - \frac{B x^2}{3 A^2} - \frac{B x^2}{3 A}.$$

Riducendo e trasportando:

$$\frac{2 B x^2}{3 A^2} = \frac{A B}{3},$$

donde:
$$x^2 = \frac{A^2}{2} \text{ e } x = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

Problema.

Calcolare le dimensioni di un ettolitro supposto di forma cilindrica e di altezza eguale al diametro della base.

L'ettolitro essendo 100 litri e ogni litro avendo il volume di un decimetro cubo, l'ettolitro sarà di 100 decimetri cubi. Detta adunque x l'altezza del cilindro espressa in decimetri, il volume del cilindro sarà rappresentato da $\frac{\pi x^3}{4}$ e perciò avremo:

$$\frac{\pi x^3}{4} = 100 \text{ e } x^3 = \frac{400}{\pi} = 127,388,$$

e perciò:
$$x = \sqrt[3]{127,388},$$

e fatti i calcoli:

$$x = \text{decimetri } 5,0 \text{ ossia m. } 0,50.$$

Il raggio della base sarà per conseguenza approssimativamente di 0^m,25.

Problema.

Trovare il raggio e la superficie della terra.

Sapendosi che il meridiano terrestre che corrisponde alla circonferenza massima della terra, supposta esattamente sferica è di metri 400000000 detto R il raggio richiesto, avremo:

$$2 \pi R = 400000000,$$

donde: $R = \frac{400000000}{6,28} = \text{m.}^1 63694267 \text{ circa.}$

La superficie essendo per data da $4\pi R^2$, avremo:

$$S = 12,56 \times (63694267)^2,$$

e fatti i calcoli:

$$S = \text{m.}^1 \text{ q.}^1 50955416387261174,$$

ossia: ettari 5095541638726 circa.



PROGRAMMA TERZO

ALGEBRA

§ 1.

Le prime quattro operazioni algebriche.

L'Algebra è quella parte delle Matematiche nella quale si generalizzano i risultati ottenuti nell'Aritmetica.

I simboli principali di cui fa uso l'Algebra sono:

1.° Le lettere alfabetiche, a, b, c, d , ec., che servono a indicare una quantità qualunque.

2.° Il segno $+$ che esprime l'addizione. Così $a + b$ indica la somma delle due quantità a e b .

3.° Il segno $-$ che indica la sottrazione e si interpone fra il sottraendo e il sottrattore e si pronunzia *meno*.

ESEMPIO $a - b$.

4.° Il segno \times di moltiplicazione che si interpone fra due quantità che si debbono moltiplicare. Così $a \times b$. Generalmente però questo segno si omette scrivendo i due fattori uno accanto all'altro come ab , quando si tratta di due lettere. Tal'altra si rimpiazza con due parentesi. Scrivendo, per esempio $(a + b)(c + d)$ si vuol esprimere che la somma delle quantità a e b deve moltiplicarsi per la somma delle quantità c e d .

5.° Il segno di divisione consistente in una lineetta orizzontale che si interpone fra le quantità a dividersi.

ESEMPIO $\frac{a}{b}$ si legge a diviso per b .

6.° Il segno di eguaglianza che si interpone fra due quantità eguali. Scritto, per esempio, $a + b = c$ si vuol

significare che la quantità c è la somma delle due quantità a e b .

7.° Il segno di disuguaglianza $>$, $<$ consistente in un piccolo angolo la cui apertura è volta dalla parte della quantità maggiore. Così $a > b$ significa a maggiore di b e viceversa $b < a$ significa che la quantità b è minore di a .

8.° Il *coefficiente*, numero che posto alla sinistra di una quantità esprime che si deve sommarla con sè stessa più volte. Così in luogo di scrivere $a + a + a$ si scriverà $3 a$. Il numero 3 è il coefficiente.

9.° L'*esponente* numero che situato un poco in alto e a destra di una lettera indica quante volte la si debba prendere come fattore. Così invece di scrivere $a \times a \times a \times a$ oppure $a a a a$ si scriverà a^4 . Il numero 4 è l'esponente.

Applicando queste definizioni si vedrà che l'espressione, per esempio, $3 a^5 b^2$ esprimerà il triplo prodotto della quinta potenza di a per la seconda potenza di b .

10.° Il segno $\sqrt{\quad}$ (radicale) che serve a esprimere una estrazione di radice. Entro l'angolo si pone l'*indice* della radice e così si dice $\sqrt[3]{a}$ (radice terza) $\sqrt[4]{a}$ (radice quarta di a), ec., vale a dire quelle quantità che elevate a 3.°, 4.°, ec., potenza riproducono a .

Per la radice seconda o quadrata non si mette alcun indice.

Si chiama *termine* algebrico ogni espressione nella quale non entrano segni di addizione o sottrazione. Il termine algebrico dicesi anche *monomio*.

Polinomio è un'espressione algebrica composta di più termini, se essi son due il polinomio è un *binomio*, se tre un *trinomio*, ec.

Un'espressione algebrica è *razionale* quando non contiene segni radicali, è *irrazionale* invece se ne contiene.

Valor numerico di una espressione algebrica è il valore che essa prende quando al posto delle lettere che vi entrano vi si sostituiscono dei numeri speciali. Da ciò ne consegue che una espressione algebrica può avere infiniti valori numerici. Così, per esempio, se nel polinomio:

$$ax^2 + bx^3 - a^2x$$

si suppone: $a = 1, b = 2, x = 3,$

si ottiene: $1 \times 3^3 + 2 \times 3^2 - 1^2 \times 3,$

e fatti i calcoli 24 per il suo valore numerico corrispondente a quelli supposti di a, b, x .

Grado di un termine è la somma degli esponenti delle lettere che vi entrano. Così a^2b^3 sarà di quinto grado perchè $2 + 3 = 5$; abc^2de^2 sarà di 7° grado, perchè:

$$1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 7.$$

Un *Polinomio* è omogeneo quando tutti i suoi termini son del medesimo grado. Tale sarebbe il trinomio:

$$ax^2 + bcx + d^3,$$

mentre non lo è, per esempio:

$$a^3 + b^2c - c^5.$$

Due termini son *simili* allorchè contengono le medesime lettere affette dagli stessi esponenti e non diversificano perciò se non che per i coefficienti. Tali sarebbero:

$$3a^2b^3 \text{ e } 5a^2b^3.$$

Allorchè in un polinomio entrano più termini simili esso è suscettibile di una semplicizzazione che dicesi *riduzione algebrica*. Se per esempio si avesse l'espressione $8a^2b + 3a^2b$ è chiaro che essa equivale ad $(8 + 3) a^2b = 11 a^2b$. In simil guisa avendosi $5a^2b + 4a^2b - 3a^2b$ è evidente che l'insieme di questi termini può disporsi sotto la forma $(5 + 4 - 3) a^2b = 6a^2b$. Da questi esempi ne segue: *che per ridurre più termini simili debbonsi fare le operazioni indicate dai loro segni sui coefficienti, attribuendo al risultato il segno che predomina.*

Applicando questa regola si troverà che il polinomio:

$$4a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 9b^3 - 2a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - 4b^3$$

è riducibile alla forma:

$$2a^3 - a^2b + 5ab^2 - 13b^3.$$

Ed in simil guisa l'altro polinomio :

$$5a^4 + 3a^2b^2c - 7ab^4 - 6a^4 + 2a^2b^2c + 17ab^4$$

diviene in forza della riduzione :

$$- a^4 + 5a^2b^2c + 10ab^4.$$

Si usa generalmente di incominciare un polinomio con un termine positivo ed allora il segno di questo termine è sottinteso.

Addizione algebrica.

Addizionare più quantità algebriche significa riunirle in una sola. E perciò se le quantità son monomie non vi sarà che ad interporre fra le medesime il segno $+$. Così volendo sommare $3a$ con $4b$ e $5c$ otterremo per risultato:

$$3a + 4b + 5c.$$

Se sono invece polinomi non si dovrà far altro che scrivere tutti i termini loro col segno che hanno, riducendo quindi il risultato, se questa riduzione è possibile. E così avendosi a sommare :

$$7x - 6y + 5z - a + 3,$$

$$\text{con: } x - 3y - a - 8,$$

$$\text{con: } y - x - 3z + 7a - 1,$$

$$\text{con: } 3y - 2x + 3z - a + 1,$$

$$\text{e con: } x + 8y - 5z + a + 9.$$

Otterremo per la somma ridotta :

$$6x + 3y + 5a + 4.$$

Eguualmente avendosi da sommare:

$$\begin{array}{r} 4a^4 + 3a^2b^2c - 8ab^4 \\ - 5a^4 + 3a^2b^2c + 16ab^4 \\ 8a^4 - 7a^2b^2c - 11ab^4 \\ 2a^4 - 6a^2b^2c - 6ab^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Somma } 9a^4 - 7a^2b^2c - 9ab^4.$$

Sottrazione algebrica.

Se si hanno due monomi da sottrarre basta di interporre fra i medesimi il segno $-$. Così la differenza fra $2a$ e $3b$ sarà $2a - 3b$.

Sia invece il binomio $a - b$ da cui vuolsi sottrarre l'altro binomio $c - d$. Il risultato non cambia se ai due termini della sottrazione si aggiunge la stessa quantità d . Perciò avremo:

$$(a - b) - (c - d) = a - b + d - (c - d + d),$$

e riducendo il sottrattore:

$$a - b + d - c.$$

Dal che si vede che mentre il sottraendo $a - b$ è rimasto inalterato si è scritto al suo seguito il diminutore con segni cambiati. Ora se anche le due espressioni su cui si fa la sottrazione fossero stati polinomi qualunque, siccome a tutti i loro termini positivi può applicarsi ciò che riguarda le quantità a e c e a quelli negativi ciò che concerne le quantità b e d ne consegue, che:

Per sottrarre due polinomi si scrivono uno di seguito all'altro dopo aver cambiato i segni al diminutore. Indi si ridurrà il risultato, ove questa riduzione sia possibile.

ESEMPLI.

$$\begin{array}{r} 3x - 2a + 6 \\ - (2x - 3a - 3) \\ \hline \end{array}$$

Differenza ridotta $x + a + 9$.

$$\begin{array}{r} \text{Sottraendo. . } 3c - 14b - 27d + 3e - 5f \\ \text{Sottrattore. . } 7a + 2b - 5c - 8d + 12e - 7f \\ \hline \text{Resto ridotto. } 8c - 7a - 17b - 19d - 9e + 2f. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Sottraendo } 5a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 \\ \text{Sottrattore } 3a^3b + 8a^2b^2 - 5ab^3 + b^4 \\ \hline \text{Resto ridotto. . . . } 2a^3b - 12a^2b^2 + 9ab^3 - 2b^4. \end{array}$$

Moltiplicazione algebrica.

Moltiplicare due quantità algebriche significa formare un tutto unico dei loro fattori.

Se queste quantità sono monomi come, per esempio $3 a^2 b$ e $4 a b^2$ è evidente che siccome:

$$3 a^2 b = 3 \times a \times a \times b,$$

$$4 a b^2 = 4 \times a \times b \times b,$$

l'unione dei loro fattori dà il risultato:

$$3 \times 4 \times a \times a \times a \times b \times b \times b = 12 a^3 b^3.$$

Osservando attentamente la formazione di questo prodotto ne emerge che:

Per moltiplicare due monomi basta moltiplicare i loro coefficienti e sommare gli esponenti delle lettere simili.

Così:

$$12 a^2 b \times 7 a^2 b c^2 = 84 a^4 b^2 c^2,$$

$$14 a^2 b c x \times 8 a b^2 x = 112 a^3 b^3 c x^2,$$

$$7 a b c d \times 8 a^2 d = 56 a^3 b c d^2.$$

Consideriamo in secondo luogo due binomi della forma $a - b$, $c - d$ vale a dire contenenti ciascuno un termine positivo ed uno negativo. Moltiplicare $a - b$ per $c - d$ equivale a ripetere $a - b$ tante volte quante unità son contenute in c meno quante unità stanno in d vale a dire che:

$$(a - b) (c - d) = (a - b) c - (a - b) d.$$

Ora $a - b$ moltiplicato per c è lo stesso che c moltiplicato per $a - b$, cioè c ripetuto per tante volte quante unità sono in a meno quante unità sono in b o ancora $c(a - b) = ac - bc$.

In simil guisa troveremo:

$$d(a - b) = ad - bd.$$

Sottraendo adunque i due prodotti parziali ottenuti, otterremo per quello totale:

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Osservando la composizione di questo prodotto si vede che esso è formato in quanto alle lettere dalla combinazione dei termini del moltiplicando con quelli del moltiplicatore e in quanto ai segni risulta che il prodotto di termini di segno identico ha dato un risultato positivo come ac e bd mentre invece quello di termini di segno diverso ha dato prodotto negativo come bc e ad .

Se invece di moltiplicare dei binomi si fossero moltiplicati dei polinomi qualunque si sarebbe potuto applicare ai loro termini positivi ciò che si è detto per a e c ed ai negativi ciò che esponemmo per b e d in guisa che ne deduciamo la seguente regola generale.

Per moltiplicare due polinomi si deve successivamente moltiplicare il moltiplicando per tutti i termini del moltiplicatore dando il segno + ai prodotti che risultano da due termini dello stesso segno e il segno — a quelli che provengono da due termini di segno contrario. Si riduce quindi il risultato, quando tal riduzione sia possibile.

La regola dei segni sopra enunciata è cognita sotto il nome di *regola dei segni di Descartes*; essa si traduce simbolicamente nel modo seguente:

$$\begin{aligned} + \times + &= + \\ + \times - &= - \\ - \times + &= - \\ - \times - &= + \end{aligned}$$

Applicando queste teorie a degli esempi noi troveremo:

Prodotto	$\frac{(6a + 2b - 8c) 7a}{42a^2 + 14ab - 56ac}$
1.° Prodotto parziale	$\frac{(x^3 - 3x - 7)(x - 2)}{x^3 - 3x^2 - 7x}$
2.° Id. id.	$\frac{-2x^3 + 6x + 14}{-2x^3 + 6x + 14}$
Prodotto totale ridotto . . .	$x^3 - 5x^2 - x + 14.$

$$(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4) \\ (a + 2b)$$

$$\begin{array}{r} a^5 - 2a^4b + 4a^3b^2 - 8a^2b^3 + 16ab^4 \\ + 2a^4b - 4a^3b^2 + 8a^2b^3 - 16ab^4 + 32b^5 \end{array}$$

Prodotto $a^5 + 32b^5$.

$$(7a^3 - 5a^2b + 6ab^2 - 2b^3)$$

$$(3a^4 - 4a^3b + 16a^2b^2)$$

$$\begin{array}{r} 21a^7 - 15a^6b + 18a^5b^2 - 6a^4b^3 \\ - 28a^6b + 20a^5b^2 - 24a^4b^3 + 8a^3b^4 \\ + 112a^5b^2 - 80a^4b^3 + 96a^3b^4 - 32a^2b^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21a^7 - 43a^6b + 150a^5b^2 - 110a^4b^3 \\ + 104a^3b^4 - 32a^2b^5. \end{array}$$

Due riflessioni importanti voglion farsi nella moltiplicazione algebrica, cioè: 1.° Se i due polinomi che si moltiplicano sono omogenei il risultato è pure omogeneo. Ciò è chiaro giacchè nella moltiplicazione addizionandosi gli esponenti, il prodotto avrà tutti i termini dello stesso grado ed eguale alla somma dei gradi dei due fattori; 2.° Il termine del prodotto che risulta dalla moltiplicazione di quelli dei due fattori che hanno la maggior potenza di una data lettera, avrà nel detto prodotto la più gran potenza di quella lettera e perciò non potrà ridursi con verun altro. Ciò risulta pure dalla stessa regola della moltiplicazione indicata. Così per esempio nell'ultimo esercizio il termine $21a^7$ prodotto di $7a^3$ che ha il più alto esponente di a nel moltiplicando per $3a^4$ che ha il più alto esponente di a nel moltiplicatore non ha potuto ridursi con nessun altro.

Divisione algebrica.

Dividere un'espressione algebrica per un'altra significa trovare una terza espressione che moltiplicata pel divisore riproduca il dividendo. Quindi la divisione algebrica non ammette resto e presuppone l'esistenza di una moltiplicazione già fatta della quale vuolsi rintracciare uno dei fattori.

Se le date espressioni sono monomi, le operazioni necessarie a determinare il quoziente saranno le inverse di quelle che si fecero nella moltiplicazione, e perciò:

Per dividere due monomi si dovranno dividere i loro coefficienti e sottrarre gli esponenti delle lettere simili.

ESEMPLI:

$$\begin{aligned} 8a^4b^3 : 2a^4b &= 4ab^2, \\ 16a^3b^3cd^2 : 2ad &= 8a^2b^3cd, \\ 15x^3y^3 : 3xy &= 5x^2y^2. \end{aligned}$$

Siano ora due polinomi qualunque da dividersi, come:

$$2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4$$

per:

$$2a^3 - 3ab + 4b^2.$$

Incominciamo a disporli secondo le potenze decrescenti di una delle loro lettere, per esempio *a* lo che si dice *ordinarli* rapporto ad *a*; vedremo bentosto l'utilità di una simil disposizione:

$$\begin{array}{r|l} 2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4 & 2a^3 - 3ab + 4b^2 \\ - 2a^4 + 3a^3b - 4a^2b^2 & \hline - 10a^3b + 27a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4 & \\ + 10a^3b - 15a^2b^2 + 20ab^3 & \hline 12a^2b^2 - 18ab^3 + 24b^4 & \\ - 12a^2b^2 + 18ab^3 - 24b^4 & \hline 0. & \end{array}$$

Siccome il quoziente incognito moltiplicato pel divisore deve riprodurre il dividendo è evidente che il termine di questo quoziente che ha il più alto esponente della lettera *a*, moltiplicato pel termine $2a^3$ del divisore affetto pure dal più alto esponente di *a* dovrà riprodurre senza riduzione il termine $2a^4$ del dividendo col maggior esponente di *a*. Ciò risulta da un'osservazione fatta nella moltiplicazione e mostra chiaramente l'utilità dell'ordinamento del polinomio. Ond'è che dividendo $2a^4$ per $2a^3$ otterremo un termine del quoziente cercato. Questa divisione di monomi dà a per risultato e solo potrebbe rimanere incerto il segno che debba

Allorchè due polinomi non possono dividersi, l'espressione del loro quoziente costituisce una frazione algebrica della quale il dividendo forma il numeratore e il divisore il denominatore.

Le frazioni algebriche avendo perciò lo stesso significato delle aritmetiche, è naturale che debbono sottostare alle stesse regole di queste ultime. E perciò:

1.° Per sommare due frazioni algebriche si riducono al medesimo denominatore e quindi se ne sommano i numeratori:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

2.° Per sottrarre due frazioni algebriche si riducono allo stesso denominatore e si sottraggono quindi i loro numeratori:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{db}.$$

3.° Per moltiplicare due frazioni algebriche si moltiplicano rispettivamente i loro numeratori ed i denominatori:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

4.° Per dividere due frazioni algebriche si moltiplica la frazione dividendo per quella divisore rovesciata:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

ESEMPLI:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} + \frac{a-3b}{cd} + \frac{a^2-b^2-ab}{bcd} = \\ & \frac{acd}{bcd} + \frac{b(a-3b)}{bcd} + \frac{a^2-b^2-ab}{bcd} = \\ & \frac{acd + ab - 3b^2 + a^2 - ab - b^2}{bcd}, \end{aligned}$$

e riducendo:
$$\frac{acd - 4b^2 + a^2}{bcd},$$

$$\frac{s}{a-s} - \frac{a}{a+s} = \frac{s(a+s)}{(a+s)(a-s)} - \frac{a(a-s)}{(a+s)(a-s)} =$$

$$\frac{as+s^2-a^2+as}{a^2+as-as-s^2} = \frac{2as+s^2-a^2}{a^2-s^2},$$

$$\left(\frac{3a+2x}{2a-x}\right) \left(\frac{5a-3x}{4a-x}\right) = \frac{(3a+2x)(5a-3x)}{(2a-x)(4a-x)} =$$

$$\frac{15a^2+10ax-9ax-6x^2}{8a^2-4ax-2ax+x^2} = \frac{15a^2+ax-6x^2}{8a^2-6ax+x^2},$$

$$\frac{a}{x-a} : \frac{b}{x+a} = \frac{a(x+a)}{b(x-a)} = \frac{ax+a^2}{bx-ab}.$$

§ 2.

Esposizione del quadrato e del cubo di $(a+b)$; prodotto di $(a+b)$ per $(a-b)$, quoziente di $a^m - b^m$ per $a-b$. Quoziente di $a^m + b^m$ per $(a+b)$ quando m è impari.

Applichiamo le teorie sulla moltiplicazione e divisione ad alcuni esempi.

Abbiasi $(a+b)(a+b)$ lo che equivale ad $(a+b)^2$; otterremo.

$$\frac{(a+b)(a+b)}{a^2+ab},$$

$$\frac{ab+b^2}{a^2+2ab+b^2} \text{ prodotto.}$$

E perciò:

Il quadrato della somma di due quantità eguaglia il quadrato della prima, più il quadrato della seconda, più il doppio prodotto di amendue.

Sia invece $(a-b)(a-b)$ lo che equivale a formare $(a-b)^2$. Otterremo:

$$\frac{(a-b)(a-b)}{a^2-ab},$$

$$\frac{-ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} \text{ prodotto.}$$

E perciò :

Il quadrato della differenza di due quantità eguaglia il quadrato della prima, più il quadrato della seconda, meno il doppio prodotto di amendue.

Vogliasi formare il cubo di $(a + b)$. Otterremo :

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)^2 (a + b), \\ &= \frac{(a^2 + 2ab + b^2)(a + b)}{a^3 + 2a^2b + ab^2}, \\ &= \frac{+ a^2b + 2ab^2 + b^3}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \text{ prodotto.} \end{aligned}$$

E perciò :

Il cubo della somma di due quantità eguaglia il cubo della prima, più il triplo quadrato della prima moltiplicato per la seconda, più il triplo quadrato della seconda moltiplicato per la prima, più il cubo della seconda.

Vogliasi fare il cubo di $(a - b)$. Avremo :

$$\begin{aligned} (a - b)^3 &= \frac{(a^2 - 2ab + b^2)(a - b)}{a^3 - 2a^2b + ab^2}, \\ &= \frac{- a^2b + 2ab^2 - b^3}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \text{ prodotto.} \end{aligned}$$

Vale a dire che :

Il cubo della differenza di due quantità eguaglia il cubo della prima, meno il triplo quadrato della prima moltiplicato per la seconda, più il triplo quadrato della seconda moltiplicato per la prima, meno il cubo della seconda.

Vogliasi moltiplicare $(a + b)(a - b)$:

$$\begin{aligned} &= \frac{(a + b)(a - b)}{a^2 + ab} \\ &= \frac{- ab - b^2}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Quindi :

Il prodotto della somma per la differenza di due quantità eguaglia la differenza dei loro quadrati.

Abbiassi da dividere $a^m - b^m$ per $a - b$, m essendo un intero qualunque. Ecco secondo le regole cognite l'andamento dell'operazione che poscia discutiamo:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 a^m - b^m \\
 - a^m + a^{m-1} b \\
 \hline
 1.^{\circ} \text{ Residuo } \text{è } a^{m-1} b - b^m \\
 - a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 \\
 \hline
 2.^{\circ} \text{ Resto } \text{è } a^{m-2} b^2 - b^m \\
 - a^{m-2} b^2 + a^{m-3} b^3 \\
 \hline
 \vdots \\
 \hline
 \text{Ultimo resto } a b^{m-1} - b^m \\
 - a b^{m-1} + b^m \\
 \hline
 0.
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 a - b \\
 \hline
 a^{m-1} + a^{m-2} b + a^{m-3} b^2 \\
 +, \text{ ec., } + b^{m-1}.
 \end{array}
 \end{array}$$

Esaminando i diversi residui si scorge che essi son tutti binomi come il dividendo ed hanno tutti il secondo termine identico $-b^m$; invece nel primo termine l'esponente di a va sempre scendendo di un' unità, mentre in modo identico cresce quello di b per guisa che la somma dei due esponenti è sempre m . Ond'è che per quanto grande sia m dovrà infine l'esponente di a ridursi all'unità e perciò l'ultimo resto sarà $a b^{m-1} - b^m$ che si divide esattamente per $a - b$.

Osservato poi il quoziente si scorge che esso è omogeneo e del grado $m - 1$; che in esso i termini sono affetti da esponenti di a sempre decrescenti di un' unità e da esponenti di b che crescono della stessa unità. Infine detto quoziente è formato simmetricamente rapporto ad a ed a b .

Applicando questa teoria ad un esempio, avremo senza far la divisione:

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4.$$

Vogliasi invece dividere $a^m + b^m$ per $a + b$, essendo però

l'esponente m un numero dispari. Ecco l'andamento dell'operazione:

	$a^m + b^m$	$a + b$
	$- a^m - a^{m-1} b$	$a^{m-1} - a^{m-2} b + a^{m-3} b^2$
1.° Resto	$- a^{m-1} b + b^m$	$- a^{m-4} b^3 + \text{ec.} + b^{m-1}$
	$+ a^{m-1} b + a^{m-2} b^2$	
2.° Resto	$a^{m-2} b^2 + b^m$	
	$- a^{m-2} b^2 - a^{m-3} b^3$	
3.° Resto	$- a^{m-3} b^3 + b^m$	
	\vdots	
Ultimo resto	$a b^{m-1} + b^m$	
	$- a b^{m-1} - b^m$	
	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>	
	0.	

Esaminando i diversi residui si scorge come essi sian tutti binomi e come abbiano un egual secondo termine $+ b^m$. Il primo termine ha gli esponenti di a sempre decrescenti di un'unità e quelli di b sempre crescenti, inoltre il suo segno è alternativamente positivo, e negativo e per modo che quando l'esponente di a è dispari il termine ha il segno $+$ e allorchè è pari il segno $-$. E perciò l'ultimo resto avrà la forma $a b^{m-1} + b^m$ ed il suo primo termine positivo.

Il quoziente è un polinomio omogeneo del grado $m-1$, ha i termini di segno alternato e in esso le potenze di a vanno decrescendo e quelle di b aumentando di un'unità.

Se m fosse pari l'ultimo residuo verrebbe $- a b^{m-1} + b^m$ e siccome esso non è divisibile esattamente per $a - b$ ne consegue che la divisione di $a^m + b^m$ per $a + b$, non è possibile se m è pari.

Applicando l'indicata teoria ad un esempio, noi otterremo senza effettuare la divisione:

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4.$$

§ 3.

Distinzione delle quantità in positive e negative. La potenza intera di grado pari di una quantità negativa è positiva. Le radici di indice pari delle quantità negative non esistono. **Postulatum.** La notazione $\sqrt{-1}$ che rappresenta la radice quadrata dell'unità negativa è adottata come una quantità il cui quadrato è l'unità negativa e si chiama quantità immaginaria; più generalmente col simbolo $\sqrt{-1}$ e con due quantità vere qualunque a e b si forma il simbolo $a + b \sqrt{-1}$ il quale è la forma generale di tutte le espressioni cui è convenuto di appellare col nome di immaginarie. Quindi la distinzione in algebra delle quantità in reali ed immaginarie. Le regole relative alle prime quattro operazioni algebriche si applicheranno anche alle quantità immaginarie, ossia alle espressioni simboliche della forma $a + b \sqrt{-1}$.

Quando un polinomio per valori speciali delle lettere che vi entrano prende un valor numerico negativo, questo valore sfugge alle definizioni ordinarie dell'aritmetica. Ma siccome questo caso è possibile, anzi comune e nulla osta a che si verifichi nè ripugna alla mente concepirlo così esso ha dato origine ad una specie di quantità che si dicono negative dal segno $-$ che le precede. Ond'è che in generale in algebra si chiamano quantità positive quelle che dopo l'aver effettuato i calcoli in esse indicati prendono in definitiva il segno $+$ e negative quelle che invece assumono il segno opposto.

Da ciò risulta:

1.° che le quantità positive sono maggiori di zero e le negative invece minori poichè poste in calcolo con altre quantità positive le diminuiscono e isolatamente indicano una sottrazione dallo zero che pel momento non può effettuarsi. Ciò si rende chiaro osservando che se si vuole sottrarre $a + b$ da a la sottrazione sarà impossibile giacchè a è minore di $a + b$. Ma se poi dai due termini della sottrazione si sottrae la stessa quantità $a + b$ i residui conserveranno la stessa relazione di grandezza e perciò essendo:

$$a < a + b,$$

dovrà pure essere:

$$a - (a + b) < a + b - (a + b),$$

ossia:
$$-b < 0,$$

come volevasi provare.

2.° Le quantità negative diminuiscono al crescere del loro valore assoluto. Così, per esempio $-3 > -7$ come si vede evidentemente osservando che siccome $0 > -4$, sottraendo da ambo i lati 3 si ottiene:

$$-3 > -7.$$

Se si considerano due quantità $+a$, $-a$ che non diversificano altro che pel segno, è chiaro prima di tutto che le potenze di $+a$ saranno tutte positive, mentre altrettanto non sarà di quelle di $-a$. E difatto:

$$\begin{aligned} (-a)^2 &= +a^2, \\ (-a)^3 &= -a^3, \\ (-a)^4 &= +a^4, \\ (-a)^5 &= -a^5, \text{ ec.} \end{aligned}$$

L'ispezione di questo quadro mostra in modo indiscutibile che le potenze pari delle quantità negative son positive e viceversa le potenze impari sono negative. Ond'è che viceversa se noi discendiamo dalle potenze alle radici avremo la possibilità di estrarre radici impari da quantità negative, ma non quella di estrarre radici pari, giacchè non esiste nessuna quantità di qualsiasi segno che elevata a potenza pari dia risultato negativo. E perciò le radici pari delle quantità negative non esistono e volendole considerare come simboli algebrici tolgono il nome di *immaginari* che chiaramente le caratterizza. Saranno dunque immaginari $\sqrt{-a}$ $\sqrt{-b}$, ec.

Allorchè si vuole estrarre la radice quadrata o in generale pari da un numero, il problema ammette due soluzioni che diversificano pel segno. Difatti $\sqrt{a^2}$ è indifferentemente $+a$ o $-a$ perchè tanto $(+a)^2$ come $(-a)^2$ riprodu-

Sostituendo questo valore di y nella (2) si ha:

$$8x + 175 = 247,$$

da cui:

$$x = \frac{247 - 175}{8} = 9.$$

E così è risoluto il sistema delle equazioni proposte.

Abbiasi per terzo esempio le equazioni algebriche:

$$\frac{a}{b+y} = \frac{b}{3a+x} \dots (1),$$

$$ax + 2by = d. \dots (2).$$

Liberando la (1) dai denominatori essa diviene:

$$3a^2 + ax = b^2 + by,$$

e cavando da quest'ultima il valore di y :

$$y = \frac{3a^2 + ax - b^2}{b}.$$

Sostituitolo nella (2) si cambia in:

$$ax + 2b \left[\frac{3a^2 + ax - b^2}{b} \right] = d,$$

o anche: $ax + 6a^2 + 2ax - 2b^2 = d,$

e riducendo e trasportando:

$$3ax = d + 2b^2 - 6a^2,$$

e:

$$x = \frac{d + 2b^2 - 6a^2}{3a}.$$

Quindi:

$$y = \frac{3a^2 + \frac{d + 2b^2 - 6a^2}{3} - b^2}{b}.$$

e semplificando:

$$y = \frac{9a^2 + d + 2b^2 - 6a^2 - 3b^2}{3b},$$

e infine riducendo ancora:

$$y = \frac{3a^2 + d - b^2}{3b}.$$

Se si avesse da risolvere un sistema di tre equazioni o tre incognite x , y , z , si comincierebbe ad eliminare una di esse, per esempio z fra la prima e la seconda e fra la prima e la terza mediante uno dei metodi suesposti. Si avrebbero così due equazioni a due incognite che verrebbero trattate nel modo consueto.

Siano per esempio le tre equazioni:

$$18x - 7y - 5z = 11 \dots\dots (1),$$

$$66y - 10x + 15z = 1620 \dots (2),$$

$$14z + 8y + 3x = 320 \dots\dots (3).$$

Moltiplicando la (1) per 3 e sommando il risultato colla (2) risulta:

$$54x - 21y - 15z + 66y - 10x + 15z = 33 + 1620,$$

e riducendo: $44x + 45y = 1653 \dots (4).$

In simil guisa moltiplicando la (1) per 14, la (3) per 5 e sommando si ha:

$$252x - 98y - 70z + 70z + 40y + 15x = 154 + 1600,$$

e riducendo: $267x - 58y = 1754 \dots (5).$

Avendo così due equazioni a due incognite caveremo dalla (4) il valore di y :

$$y = \frac{1653 - 44x}{45}.$$

Portatolo nella (5) si ha:

$$267x - 58 \left[\frac{1653 - 44x}{45} \right] = 1754.$$

Liberando dai denominatori:

$$12015x - 95874 + 2552x = 78930.$$

Riducendo: $14567x = 174804$ da cui $x = 12$.

Questo valore di x sostituito in quello di y ci dà:

$$y = \frac{1653 - 528}{45} = 25.$$

Infine i due valori di x e y portati nella (1) la cambiano nell'altra :

$$216 - 175 - 5z = 11,$$

da cui: $z = 6.$

Ove si avessero quattro equazioni a quattro incognite, cinque a cinque, ec., si opererebbe in modo analogo.

Le equazioni a più incognite essendo la traduzione algebrica di problemi, non sarà inutile il darne qualche esempio:

PROBLEMA 1.° *Due persone A e B fanno una scommessa di 12 franchi. Se A guadagna dopo la riscossione è tre volte più ricco di B; se invece perde egli è ancora due volte più ricco di B. Quanto possedevano in origine amendue?*

SOLUZIONE. Dicansi x ed y gli averi originari di A e di B. Nella prima ipotesi dopo il pagamento della scommessa essi rimangono rispettivamente possessori di :

$$x + 12, y - 12.$$

Deve dunque aversi :

$$(1). \dots x + 12 = 3 (y - 12) = 3y - 36.$$

Invece nella ipotesi inversa A rimane con $x - 12$ e B con $y + 12$; quindi :

$$(2). \dots x - 12 = 2 (y + 12) = 2y + 24.$$

Giovandosi del metodo di sottrazione e sottraendo perciò la (2) dalla (1) si ottiene :

$$12 + 12 = 3y - 2y - 36 - 24,$$

ossia : $y = 24 + 36 + 24 = 84.$

Posto questo valore di y nella (2) si avrà :

$$x - 12 = 168 + 24,$$

donde : $x = 204.$

È facile il verificare come i trovati valori di x ed y soddisfano alle condizioni del problema.

PROBLEMA 2.° *Un uomo ha due cavalli e due selle di cui una costa 200 lire e l'altra 8 lire. Ponendo la sella buona sul primo cavallo e la cattiva sull'altro, quest'ultimo vale 32 lire meno del primo. Cambiando invece le selle il secondo cavallo costa $3\frac{3}{4}$ il prezzo del primo. Qual'è il prezzo di ogni cavallo?*

SOLUZIONE. Sieno x ed y i prezzi dei due cavalli. Per la prima condizione del problema, dovremo avere:

$$x + 200 = y + 8 + 32 \dots\dots (1).$$

Per l'altra condizione sarà invece:

$$y + 200 = 3\frac{3}{4} (x + 8) \dots\dots (2).$$

La prima equazione si riduce a:

$$x = y - 160 \dots\dots\dots (3).$$

La (2) liberata dalle frazioni diviene:

$$4y + 800 = 15x + 120.$$

Sostituito in quest'ultima il valore (3) di x , essa si cambia in

$$4y + 800 = 15y - 2400 + 120,$$

che risolta conduce ad:

$$y = 280.$$

Quindi:

$$x = 120.$$

I cavalli costavano adunque 120 e 280 lire.

PROBLEMA 3.° *Un numero consta di tre cifre aventi per somma 11; la cifra delle unità è tripla di quella delle decine e se al numero si aggiunge 297 si ottiene lo stesso numero rovesciato. Qual'è il numero che gode di questa proprietà?*

SOLUZIONE. Si indichino con x , y , z le unità, decine e centinaia del numero in quistione. Si avrà dapprima:

$$x + y + z = 11 \dots\dots (1),$$

$$x = 3y \dots\dots\dots (2).$$

Di più osservando che il valore assoluto del numero nel sistema decimale è:

$$x + 10y + 100z,$$

mentre quello invece del numero rovesciato è indicato da:

$$z + 10y + 100x,$$

ne consegue che debba essere:

$$297 + x + 10y + 100z = z + 10y + 100x,$$

e riducendo: $297 + 99z = 99x$ (3).

Ora onde eliminare fra le equazioni (1), (2) e (3) si cavi y dalla (2) e si porti nella (1); verrà:

$$x + \frac{x}{3} + z = 11,$$

ovvero: $4x + 3z = 33,$

da cui: $x = \frac{33 - 3z}{4},$

valore che sostituito a sua volta nella (3) conduce a:

$$297 + 99z = 99 \frac{(33 - 3z)}{4},$$

o anche: $1188 + 396z = 3267 - 297z,$

da cui: $693z = 2079$ e $z = 3.$

Quindi: $x = \frac{33 - 9}{4} = 6,$

ed: $y = \frac{x}{3} = 2.$

Il numero cercato è perciò 326.

Riprendiamo adesso i valori generali trovati per due equazioni a due incognite, vale a dire:

$$x = \frac{b'c - c'b}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

L'ispezione di queste formule somministra una regola pratica per costruirle. Si faccia difatto la permutazione ab , ba fra i due coefficienti di x e di y nella prima equazione, si interponga fra i due termini il segno $-$ e si accentuino le ultime due lettere; otterremo $ab' - ba'$, vale a dire il comun denominatore dei due valori di x e di y . Ad ottener poscia i numeratori riflettenti ciascuna incognita si cambi

nel denominatore comune il coefficiente dell'incognita in quistione con le quantità cognite corrispondenti. E così per la x cambiate a, a' in c, c' si ottiene il numeratore $cb' - c'b$. Lo stesso dicasi per la y .

Acciocchè i valori di x e di y sieno amendue positivi, è necessario che i due termini delle frazioni che li rappresentano portino egual segno, vale a dire che se $ab' - a'b > 0$ sia pure $bc' - c'b > 0$, $ac' - a'c > 0$ o viceversa. Ove invece queste condizioni non fossero verificate, uno, o tutti e due i valori delle incognite son quantità negative. È facile il vedere che volendoli ridurre positivi, occorre modificare le equazioni primitive per guisa che l'incognita in quistione vi sia cambiata di segno. E così per esempio supposto al tempo stesso $ab' - a'b > 0$, con $ac' - a'c < 0$ la y sarebbe negativa, ed allora cambiata y in $-y$ nelle date equazioni esse prendono la forma:

$$ax - by = c, \quad a'x - b'y = c',$$

da cui eliminata x per addizione e sottrazione, ottiensì:

$$y(ab' - a'b) = a'c - ac',$$

donde:
$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Questo valore di y è essenzialmente positivo e non diversifica dall'altro se non che pel cambiamento di segno. Possiam dunque inferirne: *che i valori negativi delle incognite soddisfano alle equazioni date e prendono un significato aritmetico riferendoli ad una quistione analoga a quella già esposta, ma che però ne diversifica per modo da necessitare un cambiamento di segno nelle equazioni da risolversi per rapporto ad una o ad amendue le incognite.*

Ove uno dei numeratori di x e di y si annullasse, vale a dire che $b'c - c'b = 0$, oppure $ac' - a'c = 0$, o anche queste due equazioni sussistessero simultaneamente, ne avverrebbe che uno o i due valori delle incognite sarebbero nulli, lo che è facilmente concepibile nè presuppone incompatibilità veruna.

Ma se invece oltre alle due condizioni mentovate, risultasse di più $ab' - a'b = 0$, i valori di x e di y prenderebbero la forma:

$$x = \frac{0}{0}, y = \frac{0}{0},$$

e noi non sapremmo dare a questi simboli nessun significato. Vuolsi adunque riflettere sulle equazioni di condizione che precisano questa specialità. Ed infatti dall'essere:

$$b'c - c'b = 0 \dots\dots (\alpha),$$

$$ac' - a'c = 0 \dots\dots (\beta),$$

$$ab' - a'b = 0 \dots\dots (\gamma),$$

ne consegue che: $b' = \frac{a'b}{a},$

e perciò la (α) e (β) mediante la sostituzione si cambiano in:

$$\frac{a'bc}{a} - c'b = 0,$$

$$ac' - a'c = 0,$$

e si riducono evidentemente ad una sola $c' = \frac{a'c}{a}$. Posti ora

i valori di b' e c' nell'equazione primitiva $a'x + b'y = c'$ essa si cambia nell'altra:

$$a'x + \frac{ba'y}{a} = \frac{a'c}{a},$$

ossia: $aa'x + a'by = a'c,$

o infine: $ax + by = c.$

Ond'è che in questo caso speciale le equazioni somministrate dal problema non sono effettivamente che una sola, benchè abbiano l'apparenza di esser due. E siccome esse contengono due incognite ne consegue che una di queste potrà acquistare valori a piacere che ne determineranno altri corrispondenti per la seconda. E così la quistione cui le dette equazioni si riferiscono sarà indeterminata ed il simbolo $\frac{0}{0}$ esprimerà la caratteristica dell'indeterminazione.

Non bisogna però sempre concluderne in modo assoluto dal presentarsi un valore $\frac{0}{0}$ che esso indichi determina-

zione, potendo talvolta accadere che una frazione assuma questa forma in forza di un fattor comune esistente fra i suoi due termini.

Abbiassi, per esempio l'espressione :

$$x = \frac{a^3 - 1}{a - 1},$$

se vi si pone $a = 1$, ottiensi $x = \frac{0}{0}$. Ma osservando che :

$$a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1),$$

si può sopprimere il fattore $a - 1$ comune al denominatore e numeratore della frazione che diviene in questo caso $x = a^2 + a + 1$ e pel valore particolare 1 della quantità a , $x = 3$.

Ond' è che il simbolo $\frac{0}{0}$ esprimerà solo indeterminazione ogni qualvolta ci saremo dapprima assicurati che fra il numeratore e il denominatore della frazione che si considera non esiste nessun fattore comune che col suo annullarsi conduce all'annullamento simultaneo dei due termini considerati.

Suppongasi infine che si abbia solamente $ab' - a'b = 0$.
I valori di x e di y divengono :

$$x = \frac{b'c - c'b}{0}, y = \frac{ac' - a'c}{0}.$$

A determinarne il significato giova pensare che una frazione di numeratore costante cresce di valore colla diminuzione del denominatore e perciò essa acquista il valor massimo quando il denominatore diviene il più piccolo possibile, vale a dire zero. E siccome la serie delle quantità positive è illimitata, così si suol dire che la frazione diviene infinita quando il denominatore ne è zero. La quantità frazionaria $\frac{A}{0}$ si indica in questo caso col simbolo ∞ e si ha perciò per:

$$ab' - a'b = 0, x = \infty, y = \infty.$$

Onde ora poter dare una spiegazione di questi risultati rapporto alle equazioni proposte si osservi che dall'essere $ab' - a'b = 0$, ne viene anche:

$$b' = \frac{a'b}{a},$$

e perciò l'equazione $a'x + b'y = c'$ si trasforma nell'altra:

$$a'x + \frac{a'by}{a} = c',$$

o anche: $(m). \dots a a'x + a'by = a c'.$

Ma essendo $ax + by = c$ moltiplicando per a' ne risulta:

$$(n). \dots a a'x + a'by = a'c.$$

Ora è evidente che le due equazioni (m) ed (n) non possono esistere simultaneamente, non potendo una quantità eguagliarne al tempo stesso due altre diverse fra loro. Il simbolo ∞ ci spiega adunque una palpabile incompatibilità fra i dati proposti, nè può a rigore riguardarsi quale soluzione del problema.

Un esempio pratico spiegherà meglio la discussione sommariamente enunciata.

PROBLEMA. *Due corrieri A e B partono da due punti M ed N e si dirigono (fig. 262) in linea retta sul prolungamento della MN. Il primo fa a chilometri, il secondo b chilometri per ora; la distanza MN è di c chil. Dove si incontreranno questi corrieri?*

SOLUZIONE. Si chiamino x ed y le distanze incognite OM ed ON del punto O ai punti di partenza. Si avrà dapprima:

$$x - y = c.$$

Di più se il primo corriere fa a chil. all'ora per fare x chil. impiegherà un numero di ore rappresentato da $\frac{x}{a}$; il secondo invece per fare y chil. impiegherà ore $\frac{y}{b}$. Ma i

due corrieri si posero in viaggio simultaneamente e perciò:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \text{ ovvero } bx = ay.$$

Eliminando e risolvendo il sistema delle due equazioni stabilite ne verrà:

$$y = \frac{bc}{a-b}, \quad x = \frac{ac}{a-b}.$$

Possono ora accadere tre casi per rapporto alle quantità a e b cioè:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Nel primo caso tanto a , come b e c essendo essenzialmente positivi siccome $a > b$ i valori dell'incognite saranno pure positivi ed i corrieri si incontreranno realmente.

Quando $a = b$, si ha:

$$x = \frac{ac}{0} = \infty, \quad y = \frac{bc}{0} = \infty.$$

I due corrieri si incontrano all'infinito, cioè non si incontrano mai perchè partiti da punti diversi colla medesima velocità debbono di necessità mantenersi a una distanza eguale a quella che avevano alla partenza.

Nel terzo caso quando cioè $a < b$, x ed y son negativi ed allora ad avere un significato giusto conviene per ciò che abbiám detto cambiare i loro segni nell'equazioni primitive che si riducono ad:

$$\begin{aligned} y - x &= c, \\ -bx &= -ay, \end{aligned}$$

e che risolte danno:

$$x = \frac{ac}{b-a}, \quad y = \frac{bc}{b-a}$$

valori amendue positivi.

E qui per spiegare i valori negativi è d'uopo calcolare che se il corriere partito da A ha una velocità minore di quello partito da B è impossibile che possa mai raggiun-

gerlo almeno sul prolungamento della MN . Ma se invece si ammette che i corrieri fossero in moto da molto tempo è evidente che vi sarà stato un punto O' (fig. 263) situato non sul prolungamento di MN ma invece dalla parte opposta nel quale i due corrieri posson benissimo essersi trovati insieme mentre da quell'epoca in poi la loro distanza andò invece gradatamente aumentando. È a questo punto che si riferisce la soluzione negativa e vuolsi intendere nel senso che supposte positive le lunghezze contate da M e da N nella direzione di O sieno invece di segno contrario quelle che si stendono verso O' . E così il problema vuol esser modificato e dovrebbe enunciarsi. *Determinare il punto nel quale i corrieri erano insieme avanti di giungere in M ed N .*

La risoluzione delle equazioni non è perciò mai erronea, ma invece possono essere inesatte le condizioni enunciate nel problema.

Potrebbe avvenire che fosse $c = 0$ senza essere $a = b$. In tal caso $x = 0, y = 0$. È difatto chiaro che i due corrieri partiti dal medesimo punto con diverse velocità non saranno insieme se non che all'istante della partenza.

Ma se insieme con $c = 0$ fosse anche $a = b$, si ha:

$$x = y = \frac{0}{0}.$$

Il Problema è allora indeterminato, giacchè è evidente che i corrieri partiti insieme con velocità identiche rimarranno insieme in perpetuo in qualunque punto della MN .

Quando si ha da risolvere un sistema di due equazioni contenenti ciascuna più di due incognite il problema è indeterminato. Allora l'eliminazione conducendo ad una equazione che ha almeno due incognite è chiaro che si possono dare a varie di esse valori qualsiasi onde dedurne un valore possibile per l'ultima rimanente. La teoria completa di questa specie di equazioni *indeterminate*, importantissima per la teoria non è molto utile in pratica; è perciò che stimiamo inopportuno il parlarne.

§ 5.

Ogni equazione di secondo grado ad una incognita si riduce in generale alla forma seguente, cioè $ax^2 + bx + c = 0$, ovvero $x^2 + px + q = 0$. Risoluzione della medesima. Duplicità del valore della incognita, ossia altrimenti duplicità della radice dell'equazione. Condizione necessaria e sufficiente perchè le due radici esistano ossia siano reali. Quando esse non sono reali, sono immaginarie, cioè della forma $a + b\sqrt{-1}$. Esse sono sempre amendue reali o amendue immaginarie nel tempo stesso. In qual caso le radici sono eguali.

Un'equazione di secondo grado potendo o dovendo contenere dei termini in x^2 , in x e cogniti, potrà dopo gli opportuni trasporti al primo membro ridursi alla forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ove a e b son quantità algebriche o numeriche, positive o negative. Onde risolverla si cominci a dividere ambo i membri per a ; essa diviene:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

e ponendo per semplicità di calcolo:

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q,$$

avremo:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Aggiungendo da ambe le parti $\frac{p^2}{4}$ e portando q al secondo membro, si ha:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q,$$

e siccome il primo membro è il quadrato perfetto di $x + \frac{p}{2}$:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Estraendo ora la radice quadrata ed osservando che quella del secondo membro cognito può indifferentemente essere affetta dal doppio segno \pm , si ottiene:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

da cui:
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ponendo ora per p e q i loro valori $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, si ottiene:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

espressione che semplificata mediante la riduzione sotto il segno radicale al comun denominatore $4a^2$, e l'osservazione che la radice quadrata di una frazione eguaglia il quoziente delle radici dei suoi termini, si riduce a:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dall'ispezione dei risultati ottenuti si vede che il valore dell'incognita è duplice, o in altri termini che le equazioni di secondo grado hanno due radici. Queste radici son reali quando $\frac{p^2}{4} - q$, ovvero $b^2 - 4ac$ supera zero, perchè in tal caso la quantità sotto il segno radicale è positiva; sono immaginarie nel caso contrario.

Ove si abbia $\frac{p^2}{4} = q$, ovvero $b^2 = 4ac$ i valori della x si riducono ad un solo $x = -\frac{b}{2a}$ o $x = \frac{p}{2}$. Si dice in questo caso che le due radici sono *eguali*. Per rendersi conto di questa particolarità si rifletta che presa l'equazione generale

$+ax^2 + bx + c = 0$ se $b^2 = 4ac$ ne viene $c = \frac{b^2}{4a}$ e perciò quella equazione si trasforma nell'altra:

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0,$$

e dividendo per a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = 0,$$

che può anche scriversi:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

da cui estraendo la radice:

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \text{ e } x = -\frac{b}{2a}.$$

L'equazione proposta non è dunque di secondo grado che in apparenza, ed in realtà è riducibile ad equazione di primo grado.

Nella pratica quando si vuol risolvere un'equazione di secondo grado si incomincia col ridurla alla forma:

$$x^2 + px + q = 0,$$

indi si pongono per p e q i loro valori speciali nei valori determinati per x .

ESEMPIO. Abbiassi:

$$x^2 - 7x + \frac{13}{4} = 0.$$

In questo caso: $p = -7$, $q = \frac{13}{4}$,

quindi: $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{13}{4}},$

ovvero fatti i calcoli: $x = \frac{7}{2} \pm \frac{6}{2},$

ossia: $x = \frac{13}{2} \text{ e } x = \frac{1}{2}.$

ALTRO ESEMPIO.

$$\frac{28}{3} x^2 - \frac{271}{3} x + 195 = 0.$$

Dividendo per $\frac{28}{3}$ si ottiene:

$$x^2 - \frac{271}{28} x + \frac{585}{28} = 0.$$

E perciò: $p = -\frac{271}{28} \quad q = \frac{585}{28}.$

Quindi: $x = \frac{271}{56} \pm \sqrt{\left(\frac{271}{56}\right)^2 - \frac{585}{28}},$

e fatti i calcoli: $x = \frac{271}{56} \pm \frac{89}{56},$

e perciò separando le radici:

$$x = \frac{360}{56} = 6 \frac{3}{7},$$

$$x = \frac{182}{56} = 3 \frac{1}{4}.$$

Diamo ora alcuni esempi di problemi la cui risoluzione dipende da equazione di secondo grado.

PROBLEMA 1.° *Se si moltiplica il terzo di un certo numero pel suo quarto e si aggiunge al prodotto il quintuplo del numero stesso, il risultato sorpassa di tanto il 200 di quanto il numero è al disotto di 280. Qual'è questo numero?*

Sia x il numero, il prodotto del suo terzo pel suo quarto coll'aggiunta del quintuplo risulta $\frac{x^2}{12} + 5x$, e questo risultato sorpassa 200 della quantità $\frac{x^2}{12} + 5x - 200$. Per le condizioni del problema si avrà dunque:

$$\frac{x^2}{12} + 5x - 200 = 280 - x.$$

Liberando dalle frazioni, trasportando e riducendo, si ottiene:

$$x^2 + 72x - 5760 = 0,$$

ed:
$$x = -36 \pm \sqrt{36^2 + 5760},$$

ovvero fatti i calcoli:

$$x = -36 \pm 84,$$

e perciò $x = 48$ adottando la sola soluzione positiva.

PROBLEMA 2.° *Calcolare la profondità di un pozzo sapendo che son trascorsi 4 secondi dal momento in cui vi si lasciò cadere una pietra a quello nel quale il romore della caduta giunse a colpire l'orecchio.*

Si sa dalla fisica che la formula $s = \frac{9,809}{2} t^2$ serve a calcolare gli spazi percorsi dai gravi cadendo. Si sa inoltre che il suono si propaga con moto uniforme a ragione di 333^m per secondo.

Sia x in metri la profondità del pozzo; detto t' il tempo impiegato dalla pietra a cadere nel pozzo ed espresso in secondi, si avrà:

$$x = \frac{9,809 t'^2}{2},$$

da cui:

$$t' = \sqrt{\frac{2x}{9,809}}.$$

Chiamando t'' il numero dei secondi che il suono impiega a risalire avremo pure:

$$x = 333 t'', \text{ donde } t'' = \frac{x}{333}.$$

Ora per le condizioni del problema dovendo essere $t' + t'' = 4$, otterremo l'equazione:

$$\frac{x}{333} + \sqrt{\frac{2x}{9,809}} = 4. \dots (\alpha),$$

da cui:
$$\left(4 - \frac{x}{333}\right)^2 = \frac{2x}{9,809},$$

ovvero:
$$16 - \frac{8x}{333} + \frac{x^2}{(333)^2} - \frac{2x}{9,809} = 0.$$

Semplificando:

$$x^2 - 2664x - 2 \frac{(333)^2 x}{9,809} + 16(333)^2 = 0.$$

Fatti i calcoli necessari si troverà:

$$x = 12637 \pm 12566 \text{ (circa),}$$

e perciò:
$$\begin{aligned} x &= 25203^m, \\ x &= 71^m. \end{aligned}$$

È facile il comprendere che la sola seconda radice soddisfa al problema. La prima dipende da una generalizzazione dell'equazione (x) introdotta coll'elevazione a quadrato dei due membri, giacchè tanto elevando a seconda potenza $4 - \frac{x}{333}$ come $\frac{x}{333} - 4$ si riproduce lo stesso risultato.

§ 6.

Ricerca del massimo comune divisore di due o più polinomi razionali.

Semplificazione delle frazioni algebriche a termini razionali qualunque.

Si chiama *massimo comune divisore* di due quantità algebriche il prodotto di tutti i fattori primi che hanno a comune. Ove esse sieno monomi la ricerca di questo massimo comune divisore non potrà offrire difficoltà. Avendosi p. es. $432 a^4 b^2 x^3$ e $270 a^3 b^2 x^2$, osservato che fra i numeri 432 e 270 il massimo comune divisore è 54, che fra a^4 e a^3 è a^3 , fra b^2 e b^2 è b^2 e fra x^3 e x^2 è x^2 , ne verrà che il massimo comune divisore totale sarà $54 a^3 b^2 x^2$.

Abbiansi ora due polinomi qualunque ma intieri P e P' fra i quali si vuol trovare il massimo comun divisore. Ordinatili rapporto alle potenze decrescenti di una lettera comune x , si cercheranno col sistema indicato per i monomi i fat-

tori comuni che essi possono avere indipendenti da x . Supposto :

$$P = Md, \quad P' = Nd',$$

la ricerca del massimo comun divisore fra d e d' darà quella parte di massimo comun divisore totale che non dipende da x . Rimarrà quindi a cercare il massimo comun divisore fra M e N .

Se M è di grado maggiore di N si divida M per N e sia Q il quoziente, R il resto della divisione. Avremo :

$$M = NQ + R.$$

Questa eguaglianza fa vedere che i fattori comuni ad M ed N dividono R e viceversa quelli comuni ad R ed N dividono M , talchè i polinomi M , N , R hanno gli stessi fattori comuni, e perciò lo stesso massimo comun divisore.

Diviso quindi N per R dei ragionamenti consimili riducono la ricerca del massimo comun divisore algebrico ad un processo analogo a quello che si impiega in aritmetica sui numeri.

Sia per esempio :

$$\begin{aligned} P &= 48 a^2 b^3 x^4 - 120 a^3 b^3 x^3 + 12 a^4 b^3 x^2 - 12 a^6 b^3, \\ P' &= 48 a^3 b x^3 - 88 a^4 b x^2 - 64 a^5 b x - 8 a^6 b. \end{aligned}$$

Scrivendo :

$$\begin{aligned} P &= 12 a^2 b^3 [4 x^4 - 10 a x^3 + a^2 x^2 - a^4], \\ P' &= 8 a^3 b [6 x^3 - 11 a x^2 - 8 a^2 x - a^3], \end{aligned}$$

e cercato quindi il massimo comun divisore $4 a^2 b$ fra $12 a^2 b^3$ e $8 a^3 b$, si avrà la parte del massimo comun divisore totale che non contiene la x . Siccome poi :

$$\begin{aligned} M &= 4 x^4 - 10 a x^3 + a^2 x^2 - a^4, \\ N &= 6 x^3 - 11 a x^2 - 8 a^2 x - a^3, \end{aligned}$$

si dividerà M per N ed allo scopo di evitare le frazioni moltiplicheremo M per 3 onde rendere il suo primo termine $4 x^4$ divisibile per il primo $6 x^3$ di N , indi si procederà in

simil guisa per gli altri dividendi parziali come si scorge nell'operazione che segue:

$$\begin{array}{r}
 M = 4x^4 - 10ax^3 + a^2x^2 - a^4 \quad | \quad 6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3 \\
 \text{Molt.}^\circ \text{ per } 3. \quad 12x^4 - 30ax^3 + 3a^2x^2 - 3a^4 \quad | \quad 2x - 4a. \\
 \quad \quad \quad -12x^4 + 22ax^3 + 16a^2x^2 + 2a^3x \\
 \text{Divid.}^\circ \text{ parz.}^\circ - 8ax^3 + 19a^2x^2 + 2a^3x - 3a^4 \\
 \text{Molt.}^\circ \text{ per } 3. \quad -24ax^3 + 57a^2x^2 + 6a^3x - 9a^4 \\
 \quad \quad \quad +24ax^3 - 44a^2x^2 - 32a^3x - 4a^4 \\
 \text{Resto} \dots\dots 13a^2x^2 - 26a^3x - 13a^4.
 \end{array}$$

Il resto della divisione di M per N essendo così determinato, soppressovi il fattore 13 e ridotto così alla forma:

$$a^2x^2 - 2a^3x - a^4,$$

e colla successiva soppressione di a^2 a quella anche più semplice:

$$x^2 - 2ax - a^2,$$

dovremo dividere N per questo resto:

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3 \quad | \quad x^2 - 2ax - a^2 \\
 -6x^3 + 12ax^2 + 6a^2x \quad | \quad 6x + a \\
 \hline
 +ax^2 - 2a^2x - a^3 \\
 -ax^2 + 2a^2x + a^3 \\
 \hline
 0,
 \end{array}$$

e siccome la divisione si fa esattamente, ne viene che:

$$x^2 - 2ax - a^2$$

è il massimo comun divisore fra M ed N e perciò quello fra P e P' risulterà:

$$(x^2 - 2ax - a^2) 4a^3b,$$

ossia:

$$4a^3bx^2 - 8a^3bx - 4a^4b,$$

Per secondo esempio abbiassi da cercare il massimo comune fra i due polinomi:

$$14x^2 - 7ax \text{ e } 10bx - 5ab.$$

Essendo: $14x^2 - 7ax = 7(2x^2 - ax)$

e: $10bx - 5ab = 5b(2x - a),$

e non essendovi nessun fattor comune fra 7 e 5b, non esiste nessun fattor comune indipendente da x . Indi si dividerà:

$$2x^2 - ax \text{ per } 2x - a,$$

e siccome il quoziente è x , ne viene che il massimo comun divisore cercato è $2x - a$.

Per determinare il massimo comun divisore di più polinomi $P, P', P'',$ ec., si cerca dapprima quello di due di essi P, P' . Sia questo D ; esso conterrà tutti i fattori primi comuni a P e P' . Per avere adunque il massimo comun divisore fra P, P', P'' basterà cercarlo fra D e P'' . Sia D' ; cercheremo dopo il massimo comun divisore fra D' e P'' e seguiranno a procedere in modo analogo fino all'ultimo polinomio.

La semplificazione delle frazioni algebriche si riduce alla ricerca del massimo comun divisore fra il loro numeratore e il denominatore e quindi alla divisione dei loro due termini per questo massimo comun divisore. Dopo tale operazione rimanendo soppressi tutti i fattori comuni al numeratore e al denominatore essa diverrà irriducibile.

ESEMPIO. Sia la frazione:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Per semplificarla si cerchi il massimo comun divisore fra i suoi due termini:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 + x & x^3 - x^2 - 2x \\ -2x^3 + 2x^2 + 4x & 2. \\ \hline 5x^2 + 5x. & \end{array}$$

Soppresso il 5, si ha: $x^2 + x,$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - x^2 - 2x & x^2 + x \\
 - x^3 - x^2 & \hline
 - 2x^2 - 2x & x - 2. \\
 + 2x^2 + 2x & \\
 \hline
 0. &
 \end{array}$$

Trovato che questo massimo comun divisore è $x^2 + x$, siccome:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + x} = 2x + 1$$

e:

$$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + x} = x - 2,$$

ne viene che la frazione data si riduce alla forma più semplice:

$$\frac{2x + 1}{x - 2}.$$

§ 7.

Definizioni relative alle frazioni continue, le cui frazioni integranti hanno tutte per numeratore l'unità. La frazione continua equivalente ad un numero razionale ha un numero finito di frazioni integranti, quella equivalente ad un numero irrazionale ne ha un'infinità. Legge di formazione delle ridotte di una frazione continua. Le ridotte convergono verso il valore di una frazione continua. Limiti dell'errore che si commette assumendo per valore di una frazione continua quello di una sua ridotta.

Se si ha un numero qualsiasi N e vuolsi averne una idea esatta, si può separarne la parte intiera e quella frazionaria. Quindi sarà:

$$N = a + \frac{m}{n},$$

dividendo i due termini della frazione $\frac{m}{n}$ per m e chia-

mando y la quantità $\frac{n}{m}$ che è necessariamente maggiore dell'unità giacchè $n > m$, ne viene:

$$N = a + \frac{1}{y},$$

ove: $y > 1$ e perciò $\frac{1}{y} < 1$.

Eguualmente potremo convertire y in una parte intiera b e una frazionaria della forma $\frac{1}{s}$, talchè essendo:

$$y = b + \frac{1}{s},$$

ne verrà: $N = a + \frac{1}{b + \frac{1}{s}},$

ove: $s > 1$ e perciò $\frac{1}{s} < 1$.

Al modo stesso potremo porre:

$$s = c + \frac{1}{u},$$

e quindi: $N = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{u}}}.$

Si potrebbe così proseguire indefinitamente meno che uno dei numeri y, s, u , ec., non sia intero, nel qual caso l'operazione ha un termine.

La forma sotto la quale si è espresso il valore di N costituisce una *frazione continua*.

Quando la frazione continua è indefinita, trascurando una qualunque delle frazioni $\frac{1}{y}, \frac{1}{s}, \frac{1}{u}$, ec., si giunge a dei valori approssimativi di N che si conoscono col nome di *ridotte*.

I numeri b, c, d , ec., diconsi *quozienti incompleti*, mentre y, z, u , ec., sono *quozienti completi* e le frazioni $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, ec., diconsi *frazioni integranti*.

Un numero commensurabile può sempre esser ridotto in frazione continua di un numero limitato di termini.

Sia $\frac{A}{B}$ il numero in quistione. Per ridurlo in frazione continua si comincia dal dividere A per B , detto a il quoziente e R il resto, si ha:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{R}{B} = a + \frac{1}{\left(\frac{B}{R}\right)}.$$

Bisogna adunque dividere B per R con che si ottiene un quoziente b ed un resto R' , in seguito va diviso R per R' e così convien seguitare in simil guisa. L'operazione è dunque identica a quella che occorre per determinare il massimo comun divisore fra A e B , e siccome quest'ultima ha sempre un limite, ne consegue che sarà anche limitata la frazione continua.

ESEMPIO. Sia la frazione $\frac{251}{764}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{251}{764} &= \frac{1}{\left(\frac{764}{251}\right)} = \frac{1}{3 + \frac{11}{251}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{\left(\frac{251}{11}\right)}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{22 + \frac{9}{11}}} \\ &= \frac{1}{3 + \frac{1}{22 + \frac{1}{\left(\frac{11}{9}\right)}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{22 + \frac{1}{1 + \frac{2}{9}}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{22 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{9}{2}\right)}}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{22 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}} \end{aligned}$$

Viceversa è chiaro che un numero incommensurabile non essendo per sua natura suscettibile di essere espresso esat-

tamente sotto forma finita, la frazione continua che lo rappresenta dovrà comporsi di un numero illimitato di termini.

Dato un numero N ridotto in frazione continua della forma:

$$N = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}, \text{ ec.,}}}$$

dimosteremo che ogni ridotta si ottiene dalla precedente moltiplicandone i due termini pel quoziente incompleto al quale ci arrestiamo e sommando numeratore con numeratore e denominatore con denominatore della frazione ottenuta con quelli della ridotta che sta avanti a quella su cui si operò. Per dimostrare questa legge supponiamo che essa si verifichi per tre ridotte consecutive $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$. In tal caso sarà facile vedere come la legge è estensibile alla ridotta che segue $\frac{S}{S'}$.

Detto m il quoziente incompleto che corrisponde alla ridotta $\frac{R}{R'}$, avremo dapprima $\frac{R}{R'} = \frac{Qm + P}{Q'm + P'}$ e ciò per l'ipotesi ammessa. E se m' indica il quoziente incompleto successivo ad m , è chiaro che per passare dalla ridotta $\frac{R}{R'}$ a quella che segue $\frac{S}{S'}$ non avremo a far altro se non che cambiare m in $m + \frac{1}{m'}$ nel valore sopra ottenuto e ne verrà:

$$\frac{S}{S'} = \frac{Q \left(m + \frac{1}{m'} \right) + P}{Q' \left(m + \frac{1}{m'} \right) + P'},$$

ossia:
$$\frac{S}{S'} = \frac{Qm m' + Q + P m'}{Q' m m' + Q' + P' m'},$$

o anche:
$$\frac{S}{S'} = \frac{(Qm + P) m' + Q}{(Q'm + P') m' + Q'},$$

lo che è conforme alla legge enunciata.

Ciò posto siccome le tre prime ridotte della frazione continua sono :

$$\frac{a}{1},$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b},$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1},$$

e per esse la legge in quistione è vera, dovrà pure esserlo per la quarta e così di seguito per la quinta, sesta, ec., e così indefinitamente.

La dimostrazione data è indipendente dall'essere m intero o no, e perciò se lo si rimpiazza col quoziente completo corrispondente che chiameremo x , avremo in:

$$\frac{Rx + Q}{R'x + Q'}$$

il vero valore della frazione continua.

Le diverse ridotte sono alternativamente minori e maggiori della frazione continua.

La prima ridotta è a ed è evidentemente minore del vero valore del numero N ridotto in frazione continua. Avendosi poscia:

$$N = a + \frac{1}{y} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{s}},$$

ne segue che col rimpiazzare y per b si trascura una parte del denominatore della frazione $\frac{1}{y}$ e perciò essa è troppo grande, e troppo grande risulta anche la ridotta $a + \frac{1}{b}$. Avendosi inoltre:

$$N = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{u}}},$$

ne consegue che col rimpiazzare s per c si trascura una parte del denominatore della frazione $\frac{1}{s}$ che risulta così troppo grande e perciò è anche troppo grande $b + \frac{1}{c}$, e così la frazione $\frac{1}{b + \frac{1}{\frac{1}{c}}}$ il cui denominatore è troppo forte risulta troppo piccola ed avviene altrettanto per l'intera ridotta $a + \frac{1}{b + \frac{1}{\frac{1}{c}}}$.

Si può così continuare indefinitamente in simil guisa e provare che il numero N è sempre intermedio fra i valori di due ridotte consecutive.

La differenza di due ridotte consecutive è sempre una frazione che ha per numeratore l'unità.

Essendo $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ tre ridotte che si seguono per ordine, abbiám dimostrato che:

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qm + P}{Q'm + P'},$$

e perciò:

$$\frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qm + P}{Q'm + P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{QQ'm + PQ' - QQ'm - P'Q}{Q'(Q'm + P')} = \frac{PQ' - P'Q}{Q'(Q'm + P')},$$

e siccome:

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \frac{QP' - PQ'}{P'Q'},$$

ne viene che le due differenze hanno numeratore eguale. Ma le tre ridotte furono scelte a piacere, dunque questo numeratore risulterà costante quando si fa la differenza di due ridotte consecutive prese in un posto qualsiasi. Ma scelta la prima e seconda ridotta:

$$a \quad e \quad \frac{ab + 1}{b},$$

esse danno per differenza $\frac{1}{b}$, perciò l'unità è il valore di questo numeratore costante.

Le ridotte convergono verso il vero valore della frazione continua, vale a dire che ogni ridotta vi si approssima più di quella che la precede.

Siano $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ due ridotte e x il quoziente completo che viene dopo quello incompleto a cui ci siamo arrestati; la frazione continua sappiamo aver per valore:

$$\frac{Rx + Q}{R'x + Q'},$$

e perciò:
$$\frac{Rx + Q}{R'x + Q'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{(RQ' - R'Q)x}{Q'(R'x + Q')},$$

e:
$$\frac{Rx + Q}{R'x + Q'} - \frac{R}{R'} = \frac{QR' - RQ'}{R'(R'x + Q')},$$

e siccome per la precedente dimostrazione:

$$RQ' - R'Q = \pm 1$$

ne viene che le due differenze, astrazion fatta dal segno, divengono:

$$\frac{x}{Q'(R'x + Q')}, \quad \frac{1}{R'(R'x + Q')}.$$

Osservando ora che $x > 1$ e $Q' < R'$, ne viene che la prima differenza è maggiore della seconda e che perciò la ridotta $\frac{R}{R'}$ si approssima al vero valore di N più di quella che la precede $\frac{Q}{Q'}$.

Ad avere un limite dell'errore che si commette arrestandosi a una ridotta qualsiasi, basta evidentemente fare la differenza fra questa e la ridotta che la precede, differenza che avrà per numeratore l'unità e per denominatore il prodotto dei due denominatori delle ridotte in questione.

La riduzione in frazione continua di una frazione ordinaria serve a determinare altre frazioni a termini più semplici e che molto si accostino al vero valore della frazione data. Sia, per esempio, la frazione $\frac{1769}{5537}$. Avremo:

$$\frac{1769}{5537} = \frac{1}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}$$

Le ridotte risulteranno:

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{8}{25}, \frac{23}{72}, \frac{100}{313}, \frac{523}{1637}, \frac{623}{1950}, \frac{1769}{5537}.$$

Ond'è che arrestandosi, per esempio alla 4.^a, $\frac{23}{72}$ l'errore che si commette sarà minore di $\frac{1}{72 \times 25} = \frac{1}{1800}$.

Per dare un esempio anche della riduzione delle quantità incommensurabili in frazione continua prendasi $\sqrt{10}$. Osservando che la radice intiera del massimo quadrato contenuto in 10 è 3, potremo porre $\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{y}$,

donde:
$$y = \frac{1}{\sqrt{10} - 3},$$

e moltiplicando i due termini della frazione per $\sqrt{10} + 3$:

$$y = \frac{\sqrt{10} + 3}{10 - 9} = \sqrt{10} + 3.$$

Perciò y è compreso fra 6 e 7 e si può porre:

$$y = 6 + \frac{1}{s},$$

donde: $\frac{1}{s} = \sqrt{10} + 3 - 6$ e $s = \frac{1}{\sqrt{10} - 3} = y$.

Dunque i calcoli si riproducono periodicamente e perciò:

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \dots}}}}$$

Le ridotte successive saranno:

$$3, \frac{19}{6}, \frac{117}{37}, \frac{721}{228}, \frac{4443}{1405}, \text{ ec.}$$

Arrestandosi all'ultima l'errore commesso sarà inferiore a

$$\frac{1}{228 \times 1405} = \frac{1}{320340}.$$

Vedesi adunque la grande utilità di queste ricerche che somministrano con prontezza ogni approssimazione desiderabile.

§ 8.

Legge di formazione del prodotto di più binomi aventi il primo termine comune.

Formula che dà il numero dei prodotti differenti che si possono fare con m numeri diversi moltiplicandoli fra loro n a n . Svolgimento della potenza m^{esima} di un binomio quando m è intero e positivo. Applicazione alla estrazione della radice m^{esima} di un numero che sia una potenza m^{esima} perfetta.

Si chiamano combinazioni di m oggetti n ad n i vari gruppi che si possono formare con n degli oggetti stessi. Se si esige che in ogni gruppo tutti gli oggetti sieno diversi da quelli di ogni altro gruppo le combinazioni diconsi *prodotti differenti* o propriamente *combinazioni*; se invece basta che sia invertito l'ordine, le combinazioni diconsi *disposizioni*.

ESEMPIO. Con tre lettere a, b, c , prese due a due possono farsi tre prodotti differenti:

$$ab, ac, bc,$$

e sei disposizioni, cioè:

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb.$$

Per calcolare il numero delle disposizioni che possono farsi con m lettere prese n a n si indicherà questo numero con $D_{m,n}$ indi si rifletterà che dopo formate le disposizioni tutte delle m lettere $n - 1$ ad $n - 1$ se si pongono successivamente di seguito a ogni gruppo le $m - (n - 1)$ lettere residue noi formeremo tante disposizioni di m lettere n a n e ciò è evidente. In oltre le formeremo tutte giacchè nessun'altra formazione può condurre allo stesso risultato. Chiamando adunque $D_{m,n}$ il numero delle disposizioni delle m lettere date ad $n - 1$, avremo l'eguaglianza:

$$D_{m,n} = (m - n + 1) D_{m,n-1}.$$

Per un ragionamento analogo:

$$D_{m,n-1} = (m - n + 2) D_{m,n-2},$$

$$D_{m,n-2} = (m - n + 3) D_{m,n-3}, \text{ ec.,}$$

$$D_{m,1} = (m - 1) D_{m,0}.$$

Osservando ora che $D_{m,1}$ non può essere che m , e moltiplicando tutte l'eguaglianze membro a membro col fare al tempo stesso scomparire i fattori comuni ai due membri m , viene:

$$D_{m,n} = (m - n + 1) (m - n + 2) \dots (m - 1) m.$$

Così se si volesse il numero delle disposizioni di 7 lettere 4 a 4 otterremmo per questo numero:

$$D_{7,4} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840.$$

Se nella formola sopra trovata si fa $m = n$ e si indica il risultato col simbolo P_m , viene $P_m = 1 \cdot 2 \cdot \text{ec., } m$.

Queste disposizioni di m lettere m a m son cognite sotto il nome di *permutazioni*.

Per avere i prodotti differenti di m lettere n a n indicati dal simbolo $C_{m,n}$ osserveremo che ove fossero conosciuti

permutando in ogni gruppo le n lettere che vi entrano in tutti i modi possibili e riunendo quindi i risultati otterremo appunto il numero totale delle disposizioni. Esse vi saranno tutte e non potranno ripetersi perchè ognuna differisce dall'altra almeno per l'inversione di due lettere.

Ne viene adunque che:

$$D_{m,n} = C_{m,n} \times P_n,$$

e perciò:

$$C_{m,n} = \frac{D_{m,n}}{P_n},$$

e sostituendo per le disposizioni e le permutazioni i valori già trovati:

$$C_{m,n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.\dots.n}.$$

Volendo, per esempio, i prodotti differenti di 7 lettere 4 a 4 porremo $m = 7$, $n = 4$ e quindi:

$$C_{7,4} = \frac{7 \times 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$$

Formula del binomio di Newton.

Moltiplichiamo fra di loro un numero qualunque di binomi aventi il primo termine eguale, come sarebbero:

$$(x + a), (x + b), \text{ ec., } (x + l).$$

È chiaro prima di tutto che ogni termine del prodotto risulterà dalla moltiplicazione di m fattori scelti ciascuno in un binomio se si suppone che questi binomi siano appunto m in numero. Ordinando perciò il risultato rapporto alla lettera x , il primo termine sarà x^m prodotto di tutti i primi fattori. I termini in x^{m-1} saranno moltiplicati per a, b, c , ec., l , vale a dire per $(a + b + c$, ec., $+ l)$ quelli in x^{m-2} per ab , ac , ec., bc , ec. e così in simil guisa fino all'ultimo termine

e perciò n quello di a . Il coefficiente sarà il numero delle combinazioni che si possono fare con m lettere n ad n e perciò questo termine generale T risulta:

$$T = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} x^{m-n} a^n.$$

Dalla formula del binomio proviene un metodo generale per estrarre la radice m^{esima} di un numero qualunque. Considerando la radice in questione come composta di unità e diecine (potendo queste ultime essere più di dieci) la potenza m^{esima} sarà formata nel modo indicato dalla formula del binomio. E perciò scomposto il numero dato in classi di m cifre, si estrarrà la radice m^{esima} dalla classe a sinistra ottenendo così il numero che esprime l'unità più elevata dell'intera radice. Tolta la m^{esima} potenza di questa cifra dalla propria classe ed unite le altre classi, si otterrà un resto che ad eccezione del primo contiene tutti gli altri termini della formula del binomio. Ond'è che se si forma la $m-1^{\text{esima}}$ potenza di questa cifra, si moltiplica quindi per m e si divide per questo numero il residuo della prima classe seguito dalla prima cifra della seconda, il quoziente che si trova rappresenterà la seconda cifra della radice, ovvero una cifra troppo forte. Per provarla, scrittala accanto alla prima cifra si eleverà l'insieme alla m^{esima} potenza e si osserverà se il risultato è minore dell'insieme delle due prime classi, nel qual caso la cifra provata è buona, mentre se fosse altrimenti converrebbe scemarla di una unità. Trovata la cifra giusta si defalcherà l' m^{esima} potenza delle due cifre trovate dalle prime due classi e sul residuo a cui si sono unite le altre classi si opererà come sul primo residuo, onde avere la terza cifra della radice e così di seguito.

Abbiasi per esempio $\sqrt[5]{550731776}$.

Separate le cinque cifre a destra si estrarrà la radice quinta dal 5507, lo che darà le diecine dell'intera radice. In questo caso detta cifra è 5 e $5^5 = 3125$, e perciò tolto 3125 da 5507 e unita al residuo 2382 la prima cifra 3 della classe

che segue avremo compreso nel 23823 il quintuplo prodotto della 4.^a potenza delle 5 decine per le incognite unità e così diviso 23283 per $5 \times 5^4 = 3125$ il quoziente 7 rappresenterà le unità della intiera radice, ovvero una cifra troppo forte. Faremo la prova di questa cifra elevando il 57 alla 5.^a potenza e siccome il risultato supera il numero dato essendo 601692057 così proveremo invece il 6 che si riscontrerà essere esatto, giacchè appunto $56^5 = 550731776$.

§ 9.

La radice m^{esima} di un numero il quale non sia una potenza m^{esima} perfetta è un numero irrazionale. Estrazione per approssimazione delle radici dei numeri. Formazione delle potenze ed estrazione delle radici dei monomi e polinomi razionali. Significato delle espressioni $a^{\frac{m}{n}}$ ed $a^{-\frac{m}{n}}$.

Quando il numero intiero di cui si domanda la radice n^{esima} non è potenza n^{esima} perfetta, detta radice non può ottenersi esattamente ed il metodo esposto nel paragrafo precedente serve solo a darne la parte intiera. Difatto essendo $\frac{a}{b}$ una frazione irriducibile $\frac{a^n}{b^n}$ lo è pure, nè può perciò formare un numero intiero N , vale a dire che $\sqrt[n]{N}$ non può aversi sotto la forma di frazione ordinaria. Si può però avere questa radice con l'approssimazione che si desidera.

Sia in generale da estrarre:

$$\sqrt[n]{N} \text{ a meno di } \frac{1}{p}.$$

Noi abbiamo identicamente:

$$N = \frac{Np^n}{p^n}$$

e per conseguenza:

$$\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{Np^n}}{p}$$

e se si chiama r la radice di Np^n a meno dell'unità, ne verrà che il vero valore di $\sqrt[p]{N}$ sarà compreso fra $\frac{r}{p}$ e $\frac{r+1}{p}$. Dunque infine $\frac{r}{p}$ è in meno la radice dimandata con errore minore della frazione $\frac{1}{p}$.

Abbiasi, per esempio, $\sqrt[6]{23}$ da estrarsi a meno di un centesimo. Applicando la regola generale suesposta, si scriveranno dodici zeri alla destra del 23 ed estratta la radice sesta dal numero così ottenuto vi si separeranno due cifre decimali. Effettuati i calcoli, si trova che:

$$\sqrt[6]{23} = 1,68 \text{ a meno di un centesimo.}$$

In simil guisa si troverà che $\sqrt[4]{29,437} = 2,329$ con errore minore di un millesimo.

Proponiamoci adesso di formare le potenze, prima dei monomi, quindi dei polinomi razionali. Sia per primo esempio a formare la quinta potenza di $2a^3b^2$. Avremo:

$$(2a^3b^2)^5 = 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2,$$

ossia: $2^5 a^{3+3+3+3+3} b^{2+2+2+2+2} = 32 a^{15} b^{10}.$

Ciò prova che per elevare un monomio a una data potenza basta elevarne il coefficiente a questa medesima potenza, indi moltiplicare l'esponente di ogni lettera per l'indice della potenza.

E così se si vuol discendere dalla potenza alla radice ne viene per natural conseguenza che ad estrarre la radice da un monomio debba estrarsi la radice dal suo coefficiente e dividere l'esponente di ogni lettera per l'indice della radice.

Per questa regola:

$$\sqrt[3]{64 a^9 b^3 c^3} = 4 a^3 b c,$$

$$\sqrt[4]{16 a^8 b^{12} c^4} = 2 a^2 b^3 c.$$

Ogni qualvolta le operazioni indicate non siano possibili, bisogna concluderne che il monomio in questione non è una

potenza perfetta del grado cui l'estrazione di radice si riferisce.

È poi naturale che ove la radice da estrarsi sia di grado pari essa potrà essere affetta indifferentemente dal segno $+$ o $-$, mentre se invece è di grado dispari sarà positiva o negativa insieme col monomio da cui deriva.

Passiamo adesso ai polinomi. La determinazione del processo che serve ad estrarne la radice m^{esima} fondasi sul seguente principio:

Se un polinomio A ordinato per le potenze decrescenti di una lettera è la potenza m^{esima} di un altro polinomio B ordinato egualmente, il primo termine di A è la potenza m^{esima} del primo termine di B.

Quando si moltiplicano più polinomi il primo termine del prodotto è il prodotto dei primi termini dei fattori; dunque se tutti questi fattori sono eguali ed m di numero il primo termine del prodotto sarà la m^{esima} potenza del primo termine di ogni fattore, come volevasi provare.

Ond'è che allorchè un polinomio potenza m^{esima} perfetta è ordinato rapporto alle potenze decrescenti di una data lettera x il suo primo termine darà mediante l'estrazione di radice m^{esima} il primo termine dell'intera radice.

Conosciuto questo primo termine T , detta s la somma di tutti gli altri e A il polinomio proposto avremo identicamente:

$$A = (T + s)^m,$$

e sviluppando il secondo membro colla formula del binomio:

$$A = T^m + m T^{m-1} s + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} T^{m-2} s^2, \text{ ec., } + s^m,$$

o anche:

$$A - T^m = m T^{m-1} s + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} T^{m-2} s^2, \text{ ec., } + s^m.$$

Questa eguaglianza essendo un'identità, i primi termini dei due membri debbono essere eguali e perciò siccome A e T^m son conosciuti sarà facile il calcolare $m s T^{m-1}$ e per

conseguenza z . Chiamando perciò v il primo termine o meglio il più elevato di z per rapporto alla lettera secondo la quale si ordinò, ne viene che v sarà il quoziente della divisione del primo termine di $A - T^m$ per $m T^{m-1}$.

Trovato T e v se si fa $T + v = T'$ e si ragiona come di sopra si giungerà a trovare un altro termine della radice e così di seguito.

Abbiassi, per esempio, da estrarre la radice quadrata dal polinomio :

$$49 a^2 b^2 - 24 a b^3 + 25 a^4 - 30 a^3 b + 16 b^4.$$

Ordinatolo rapporto alla lettera a si osserverà che il suo primo termine $25 a^4$ avendo per radice $5 a^2$, sarà questo il primo termine della radice. Sottratto quindi $25 a^4$ dall'intero polinomio e diviso il termine $-30 a^3 b$ per $10 a^2$ corrispondente a $m T^{m-1}$ il quoziente $-3 a b$ rappresenterà il secondo termine della radice. Facendo il quadrato di $5 a^2 - 3 a b$ che è:

$$25 a^4 - 30 a^3 b + 9 a^2 b^2,$$

e sottraendolo dal polinomio primitivo si avrà per resto:

$$40 a^2 b^2 - 24 a b^3 + 16 b^4,$$

e diviso $40 a^2 b^2$ pel doppio di $5 a^2$ il nuovo quoziente $4 b^2$ rappresenterà il terzo termine della radice che sarà così in definitiva:

$$5 a^2 - 3 a b + 4 b^2.$$

Ecco il modo col quale in pratica suol disporsi l'operazione:

$$\begin{array}{r|l} 25 a^4 - 30 a^3 b + 49 a^2 b^2 - 24 a b^3 + 16 b^4 & 5 a^2 - 3 a b + 4 b^2 \\ - 25 a^4 + 30 a^3 b - 9 a^2 b^2 & \\ \hline 1.^{\circ} \text{Resto : } 40 a^2 b^2 - 24 a b^3 + 16 b^4 & 10 a^2. \end{array}$$

Il quadrato di: $5 a^2 - 3 a b + 4 b^2$,

$$\text{è: } \underline{25 a^4 - 30 a^3 b + 49 a^2 b^2 - 24 a b^3 + 16 b^4}$$

2.° Resto : 0.

Passiamo adesso a far conoscere alcune nuove indicazioni sugli esponenti che servono molte volte a semplificare i calcoli algebrici; in altri termini indichiamo brevemente il significato degli esponenti negativi e frazionarii.

Supponiamo che si voglia dividere a^m per a^n ; il risultato di questa divisione è per ciò che sappiamo a^{m-n} . Ma se $m < n$ e perciò $m - n = -p$ il quoziente a^{-p} contiene un esponente negativo. Per scorger qual sia il vero significato di questa espressione osserviamo che se:

$$m - n = -p,$$

ne viene che:

$$n = m + p,$$

e perciò:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \times a^p},$$

frazione che semplificata mediante la soppressione del fattore a^m comune ai due termini si riduce a $\frac{1}{a^p}$. E perciò:

L'esponente negativo è il simbolo di una divisione che non potè effettuarsi; il suo vero valore eguaglia l'unità divisa per la lettera base affetta dallo stesso esponente preso con segno positivo.

Abbiasi invece da estrarre la radice n^{esima} dalla quantità a^m . Se m è multiplo di n noi sappiamo doversi dividere l'esponente m per l'indice n della radice. Ma se questa divisione non è possibile si può stabilire per convenzione di indicare questa operazione. E così invece di $\sqrt[n]{a^m}$ scriveremo $a^{\frac{m}{n}}$.

Dalla combinazione di una estrazione di radice e di una divisione di monomi impossibili ad effettuarsi nascerà poi l'esponente frazionario negativo. E così sarà:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

§ 10.

Calcolo dei radicali aritmetici, cioè loro addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, inalzamento a potenza, ed estrazione di radice. Casi i più semplici in cui una frazione a denominatore irrazionale si può trasformare in altra equivalente col denominatore razionale.

Son radicali aritmetici quelli che contengono soli numeri.

Per addizionare o sottrarre due o più radicali basta interporre fra i medesimi il segno $+$ o $-$ a seconda dei casi. Talvolta il risultato è suscettibile di qualche riduzione che esige però la cognizione di un teorema preparatorio che qui sotto dimostreremo.

La radice n^{esima} di un prodotto è eguale al prodotto delle radici n^{esime} dei fattori.

È difatto evidente che sia :

$$\sqrt[n]{abcd}, \text{ ec., } = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}, \text{ ec.,}$$

giacchè se si elevano i due membri alla stessa potenza n^{esima} si produce l'identità :

$$abcd \dots = abcd, \text{ ec.}$$

Ciò posto supponiamo di aver il radicale $\sqrt[n]{ab^m}$; per il principio dimostrato esso sarà eguale a:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^m} = b \times \sqrt[n]{a} = b \sqrt[n]{a}.$$

E così il radicale primitivo è scomposto in due parti, una razionale, l'altra irrazionale che col loro prodotto lo riproducono. Si dice allora che si è portato il numero b fuori di radicale.

Applicando questo principio all'atto pratico troveremo:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{72} = 6\sqrt{2},$$

$$\sqrt[3]{27} = 3\sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Si chiamano radicali simili quei radicali dello stesso indice che contengono lo stesso numero sotto il segno radicale. È evidente allora che allorchè son combinati coi segni di addizione e sottrazione si potranno ridurre fra di loro.

ESEMPIO.

$$6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} =$$

$$\left[6 - 5 + 3 - \frac{1}{2}\right]\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

Talvolta dei radicali che apparentemente non son simili si possono far divenire tali mediante un conveniente passaggio di alcuni fattori fuori del segno radicale. Così avendosi:

$$\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6},$$

si osserverà che:

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}, \quad \sqrt{54} = 3\sqrt{6},$$

e l'espressione si convertirà in:

$$2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{6} = 4\sqrt{6}.$$

Eguualmente:

$$7\sqrt{18} - 2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - \sqrt{50} =$$

$$21\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 30\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 42\sqrt{2}.$$

Al modo stesso con cui i fattori mediante estrazione di radice vengono a escir fuori di radicale con elevazione conveniente a potenza vi si possono ricondurre. E difatto $b\sqrt[m]{a}$ è identicamente eguale a $\sqrt[m]{ab^m}$.

Perciò: $8 \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3 \times 64}{4}} = \sqrt{48},$

$$2 \sqrt{\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{3 \times 4}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Il principio dimostrato dà luogo anche ad un'altra specie di semplicizzazione.

Suppongasi, ad esempio, di avere $\sqrt[n]{4a^2}$. Siccome quest'espressione è la stessa di $\sqrt[n]{\sqrt[n]{4a^2}}$ e $4a^2$ è quadrato perfetto si ottiene $\sqrt[n]{4a^2} = \sqrt[n]{2a}$. In generale $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$, vale a dire che se l'indice del radicale è multiplo di un numero m e la quantità sotto il segno radicale è potenza m^{esima} esatta, si può dividere l'indice per m ed estrarre la stessa radice dalla quantità sotto il segno. Inversamente è chiaro che si potrà moltiplicare l'indice del radicale per un numero purchè contemporaneamente si elevi a quella potenza la quantità sotto il segno radicale. Così:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[ma]{a^m}.$$

Per mezzo di questa osservazione si possono ridurre due radicali ad avere il medesimo indice. Avendosi così $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[m]{b}$ essi potranno rispettivamente cambiare in:

$$\sqrt[ma]{a^n}, \sqrt[mb]{b^m}.$$

E così:

Per ridurre vari radicali allo stesso indice si dovrà moltiplicare l'indice di ogni radicale pel prodotto di tutti gli altri indici elevando la quantità sotto il segno alla potenza indicata da questo prodotto.

Allorchè gli indici dei radicali hanno qualche fattore comune si possono semplicizzare i calcoli riducendo quei radicali ad un indice dato dal minimo multiplo fra tutti gli indici in quistione. Questa operazione offre grandissima analogia colla riduzione delle frazioni al medesimo denominatore.

ESEMPIO. Abbiassi $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[8]{12}$ essendo 24 il minimo multiplo fra 4, 6 e 8, potremo ridurre i tre radicali ad aver per indice comune questo numero, con che si cambieranno in :

$$\sqrt[24]{6^6}, \sqrt[24]{3^4}, \sqrt[24]{12^8},$$

ovvero in: $\sqrt[24]{46656}, \sqrt[24]{81}, \sqrt[24]{1728}.$

Quando si vogliono moltiplicare due radicali il caso più semplice si è quello in cui abbiano il medesimo indice. Sia così $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$. Io dico che si ha identicamente :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Difatto elevando le due quantità rappresentanti i due membri alla stessa potenza *m*^{esima} viene lo stesso risultato ab , e perciò queste espressioni sono eguali.

Ciò che si è detto per la moltiplicazione provasi in modo perfettamente identico per la divisione.

Ond'è che:

Per moltiplicare o dividere due radicali dello stesso indice basta moltiplicare o dividere le quantità sotto il segno e dare al risultato l'indice comune dei due radicali.

Quando i radicali non abbiano il medesimo indice vi si ridurranno, indi si opererà come fu detto di sopra.

Applicando queste teorie ad alcuni esempi scelti fra i radicali quadrati, come quelli il cui uso è comunissimo, troveremo:

$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 3\sqrt{10})2\sqrt{5} = \\ 10 + 4\sqrt{35} + 6\sqrt{50},$$

$$(7 + 2\sqrt{6})(9 - 5\sqrt{6}) = \\ 63 + 18\sqrt{6} - 35\sqrt{6} - 60,$$

e riducendo: $3 - 17\sqrt{6},$

$$\begin{aligned} & (3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 7\sqrt{7})(\sqrt{6} + 5\sqrt{3} + \sqrt{10}) = \\ & 3\sqrt{12} + 2\sqrt{30} - 7\sqrt{42} + 15\sqrt{6} + 10\sqrt{15} - 35\sqrt{21} \\ & + 3\sqrt{20} + 2\sqrt{50} - 7\sqrt{70}. \end{aligned}$$

Accade sovente che un'espressione a denominatore irrazionale può convertirsi in altra avente il denominatore razionale e ciò mediante una conveniente trasformazione. Fra i casi più semplici noteremo: 1.° quello in cui l'espressione ha un solo radicale in denominatore; 2.° quello in cui questo termine consta di due radicali dello stesso indice potenza del 2; 3.° quando si compone di tre radicali quadrati.

1.° CASO. Abbiassi la frazione:

$$\frac{M}{\sqrt[m]{N}}.$$

Moltiplicando i due termini per:

avremo:

$$\frac{M \sqrt[m]{N^{m-1}}}{\sqrt[m]{N} \sqrt[m]{N^{m-1}}} = \frac{M \sqrt[m]{N^{m-1}}}{N}.$$

2.° CASO. Abbiassi:

$$\frac{M}{\sqrt[m]{A} \pm \sqrt[m]{B}}$$

ove m è una potenza del 2. Moltiplicando numeratore e denominatore per

$$\sqrt[m]{A} \mp \sqrt[m]{B},$$

otterremo:

$$\frac{M [\sqrt[m]{A} \mp \sqrt[m]{B}]}{[\sqrt[m]{A}]^2 - [\sqrt[m]{B}]^2},$$

giacchè si sa che il prodotto della somma per la differenza di due quantità dà per prodotto la differenza dei loro quadrati.

Osservando attentamente questa ultima espressione è facile scorgere che l'indice dei due radicali che entrano nel denominatore è ridotto di metà. Una nuova e consimil trasformazione permettendo una seconda riduzione, ne consegue, che siccome m è potenza del 2 dopo un certo numero di operazioni i radicali diverranno quadrati e si arriverà così ad una frazione della forma:

$$\frac{P}{\sqrt{A} - \sqrt{B}},$$

ove P rappresenta un polinomio irrazionale qualunque risultato di tutti i calcoli antecedenti.

Moltiplicando ora i due termini di quest'ultima frazione per $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, si otterrà infine:

$$\frac{P\sqrt{A} + P\sqrt{B}}{A - B}.$$

3.° CASO. L'espressione da trasformarsi sia:

$$\frac{M}{\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}}.$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C};$$

considerando:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B},$$

come una sola quantità ed applicando alla moltiplicazione i teoremi cognitivi, avremo:

$$\frac{M\sqrt{A} + M\sqrt{B} - M\sqrt{C}}{(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 - (\sqrt{C})^2} =$$

$$\frac{M\sqrt{A} + M\sqrt{B} - M\sqrt{C}}{A + B + 2\sqrt{AB} - C}.$$

Se ora si moltiplicano i due termini di questo risultato per:

$$A + B - C - 2\sqrt{AB},$$

ne verrà in simil guisa:

$$\frac{[M\sqrt{A} + M\sqrt{B} - M\sqrt{C}][A + B - C - 2\sqrt{AB}]}{(A + B - C)^2 - (2\sqrt{AB})^2}$$

ovvero:

$$\frac{[M\sqrt{A} + M\sqrt{B} - M\sqrt{C}][A + B - C - 2\sqrt{AB}]}{(A + B - C)^2 - 4AB},$$

espressione che, come si vede, non contiene più radicali al suo denominatore.

Applichiamo queste teorie alla semplicizzazione di qualche frazione contenente radicali di secondo grado. Avendosi, ad esempio:

$$\frac{\sqrt{72} + \sqrt{32} - 4}{\sqrt{8}},$$

moltiplicandone i due termini per $\sqrt{8}$, la cambieremo nell'altra:

$$\frac{\sqrt{576} + \sqrt{256} - 4\sqrt{8}}{8} = \frac{24 + 16 - 8\sqrt{2}}{8}$$

e effettuando la divisione:

$$5 - \sqrt{2}.$$

Similmente:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} &= \frac{(1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2}{2} \\ &= 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\frac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{5} - \sqrt{18}} = \frac{(3\sqrt{5} - 2\sqrt{2})(2\sqrt{5} + \sqrt{18})}{20 - 18} =$$

$$\begin{aligned} \frac{30 - 4\sqrt{10} + 3\sqrt{90} - 2\sqrt{36}}{2} &= \frac{18 - 4\sqrt{10} + 9\sqrt{10}}{2} = \\ &= 9 + \frac{5}{2}\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Avendosi anche: $\frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}},$

si moltiplicherà dapprima i due termini della frazione per:

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

e ne verrà:

$$\frac{(3 + 4\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 5},$$

e sviluppando:

$$\frac{3\sqrt{6} + 4\sqrt{18} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{6} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{15}}{6 + 2 + 2\sqrt{12} - 5},$$

e riducendo:

$$\frac{7\sqrt{6} + 15\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{15}}{3 + 4\sqrt{3}}.$$

Moltiplicando ancora numeratore e denominatore per:

$$4\sqrt{3} - 3,$$

ne verrà:

$$\begin{aligned} & \frac{28\sqrt{18} + 60\sqrt{6} + 12\sqrt{15} + 16\sqrt{45} - 21\sqrt{6} - 45\sqrt{2} - 9\sqrt{5} - 12\sqrt{15}}{48 - 9} = \\ & \frac{39\sqrt{6} + 39\sqrt{2} + 39\sqrt{5}}{39} = \sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Per dare anche un esempio di una frazione irrazionale algebrica scelgasi l'espressione:

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}},$$

A renderne razionale il denominatore ne moltiplicheremo i due termini per $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$ e avremo:

$$\frac{[\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}]^2}{a+x - (a-x)}$$

e sviluppando il numeratore mediante il noto teorema che dà il quadrato della somma di due quantità:

$$\frac{a + x + a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2}}{2x} = \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

§ 11

Estensione agli esponenti frazionari e negativi delle regole del calcolo degli esponenti interi e positivi quando non si considerano che i valori aritmetici delle potenze frazionarie.

Abbiamo già veduto al § 9 qual significato debba attribuirsi agli esponenti negativi e frazionari. Tenendo conto di quel significato riescirà ora facile il dimostrare che le regole per la moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza od estrazione di radici delle quantità affette da tali esponenti son perfettamente identiche a quelle già indicate per gli esponenti positivi.

Moltiplicazione.

Abbiasi dapprima $a^{-m} \times a^{-n}$. Noi sappiamo che:

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}},$$

e perciò tornando ad adottare la notazione negativa, a^{-m-n} .

Sia invece: $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}$.

Avremo: $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p},$

e riducendo i due radicali al medesimo indice nq :

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}},$$

e ritornando alla notazione frazionaria:

$$a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{p}{q}.$$

Se infine si avesse:

$$a^{-\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}},$$

otterremo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} &= \frac{1}{\sqrt[nq]{a^{mq+np}}} = \frac{1}{a^{\frac{mq+np}{nq}}} \\ &= a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

L'esame dei tre risultati ottenuti ci porta alla conclusione che *per moltiplicare due potenze qualsiasi di una quantità basta sommare gli esponenti.*

Divisione.

$$\text{Sia: } a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

$$\text{Invece avendosi: } a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}},$$

$$\begin{aligned} \text{otterremo: } \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} &= \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{pn}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Infine: } a^{-\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} : \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} \\ &= \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{np}}{a^{mq}}} = \sqrt[nq]{a^{np-mq}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

L'esame dei risultati ottenuti mostra ad evidenza che *per dividere due potenze qualsiasi della stessa quantità basta sottrarne gli esponenti.*

Elevazione a potenza.

L'elevazione a potenza non essendo altro che una moltiplicazione di fattori eguali ne consegue chiaramente che per elevare alla m^{esima} potenza un monomio affetto da esponente qualunque occorre moltiplicare per m questo esponente.

Estrazione di radice.

Se si ha da estrarre radice m^{esima} da un monomio affetto da esponente qualunque basta riflettere che l'esponente del risultato deve esser tale che moltiplicatolo per m riproduca il primitivo. Perciò ad ottenerlo basterà dividere quest'ultimo per m .

E così le regole date in principio dell'algebra per gli esponenti positivi sono generalizzate ed estese a quelli di natura qualsiasi.

ESEMPII:

$$a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{5}{3}} = a^{\frac{29}{12}},$$

$$a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{7}{4}} = a^{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{4}},$$

$$a^{-\frac{3}{5}} b^{\frac{1}{4}} : a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{7}{8}} = a^{\frac{1}{10}} b^{-\frac{5}{8}},$$

$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^5 = a^{\frac{15}{4}},$$

$$\left(2 a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}\right)^6 = 64 a^{-3} b^{\frac{9}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{9}},$$

$$\sqrt[3]{a^{\frac{3}{5}} b^{-1}} = a^{\frac{1}{5}} b^{-\frac{1}{3}}.$$

§ 12.

Risoluzione e discussione dell'equazione $x^2 + px + q = 0$. Decomposizione del trinomio $x^2 + px + q$ in fattori della forma $x - a$.

Noi abbiamo già altra volta risolta l'equazione generale di secondo grado $x^2 + px + q = 0$ ed abbiám trovato i due valori dell'incognita:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Trattasi ora di esaminare questi valori a seconda dei valori speciali che hanno le quantità cognite p e q .

In generale dovremo esaminare quattro casi a seconda dei segni di cui p e q sono affetti.

1.° CASO. p e q sono amendue positivi. Allora se $\frac{p^2}{4} > q$ le due radici saran reali e siccome il radicale resulta di sua natura minore di $\frac{p}{2}$, i valori della incognita resultano negativi. Se invece $\frac{p^2}{4} < q$ le due radici sono immaginarie.

2.° CASO. p è negativo e q positivo. Ponendo in evidenza il segno di p ne viene:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Allora se $\frac{p^2}{4} > q$ le radici son reali e siccome il radicale è inferiore a $\frac{p}{2}$ resultano anche positive amendue. Se invece $\frac{p^2}{4} < q$ le radici sono immaginarie.

3.° CASO. p è positivo e q negativo. Ponendo allora in evidenza il segno del q , ne verrà:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

La quantità sotto il segno radicale essendo sempre essenzialmente positiva le radici sono amendue reali e siccome inoltre essa supera il $\frac{p}{2}$ ne viene che preso il segno superiore otterremo una radice positiva, mentre prendendo l'inferiore si ha una radice negativa.

4.° CASO p e q sono amendue negativi. In tal caso i valori di x saranno:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Le radici sono sempre reali e siccome il radicale supera $\frac{p}{2}$, la radice superiore sarà positiva e l'inferiore negativa.

Diconsi ora α , α' le due radici; nel caso generale avremo:

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$\alpha' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Sommando:

$$\alpha + \alpha' = -p.$$

Invece moltiplicando:

$$\alpha\alpha' = \frac{p^2}{4} - \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + \frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right),$$

e riducendo:

$$\alpha\alpha' = q.$$

Questi risultati provano:

Che la somma delle radici di un'equazione di secondo grado eguaglia il coefficiente della prima potenza dell'incognita preso con segno contrario. Il prodotto delle stesse radici è eguale al termine cognito.

Sostituendo per p e q i loro valori sopra trovati nell'Equazione generale essa diviene:

$$x^2 - (\alpha + \alpha')x + \alpha\alpha' = 0,$$

o anche: $(x - \alpha)(x - \alpha') = 0.$

Ciò fa vedere:

Che quando α è una radice della data equazione, il suo primo membro è esattamente divisibile per $x - \alpha$;

Che un trinomio di secondo grado in x della forma $x^2 + px + q$ è decomponibile in due fattori di primo grado aventi per primo termine la x e per secondo termine ognuna delle due radici dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero questo trinomio.

§ 13.

Risoluzione e discussione dell'equazione $x^4 + px^2 + q = 0$. Come la formula $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ in cui A e B sono numeri razionali si possa talvolta ridurre alla forma $\sqrt{M} \pm \sqrt{N}$ essendo M e N numeri razionali. Estrazione della radice quadrata da una quantità immaginaria.

Si chiama *equazione biquadratica* un'equazione di 4.º grado nella quale entra solo la 4.ª, la 2.ª potenza dell'incognita ed il termine cognito. Da ciò ne viene che dopo il trasporto al primo membro e la divisione totale pel coefficiente della quarta potenza essa potrà ridursi alla forma:

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

Per risolverla si ponga $x^2 = y$ donde:

$$x^2 = y^2 \text{ e } x = \pm \sqrt{y}.$$

La sostituzione convertirà l'equazione data nell'altra:

$$y^2 + py + q = 0,$$

che è di secondo grado in y e somministra:

$$y = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

e perciò:
$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Ciò mostra che in generale vi sono quattro valori di x che soddisfano alla data equazione o in altri termini che la biquadratica ha quattro radici.

Per determinare di quale natura sieno questi valori distingueremo quattro casi a seconda dei segni speciali delle quantità p e q .

1.° CASO. p e q son positivi.

Allora se $\frac{p^2}{4} < q$ il radicale sottoposto essendo immaginario, son pure immaginarie le quattro radici. Se invece $\frac{p^2}{4}$ supera q siccome $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ è sempre minore di $\frac{p}{2}$ la quantità sotto il radicale esterno sarà sempre negativa e così le radici saranno ancora immaginarie.

2.° CASO. p è positivo e q negativo.

Posto in evidenza il segno di q si ottiene:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}}.$$

Il radicale sottoposto è sempre reale e rappresenta una quantità superiore al $\frac{p}{2}$, ond'è che adottando il suo segno superiore si ottengono due radici reali, eguali e di segno contrario, mentre adottandone l'inferiore vengono due radici immaginarie.

3.° CASO. p è negativo e q positivo.

Posto in evidenza il segno di p , viene:

$$x = \pm \sqrt{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

In questo caso se $\frac{p^2}{4} < q$ le radici sono immaginarie. Se invece accade il contrario qualunque sia il segno del radicale sottoposto siccome esso è minore di $\frac{p}{2}$ le radici son

reali e perciò atteso il doppio segno esterno, due positive e l'altre negative.

4.° CASO. p e q son negativi.

Si ha in tal caso:

$$x = \pm \sqrt{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}}.$$

Il radicale sottoposto è sempre reale e superiore a $\frac{p}{2}$. E perciò se si prende il suo segno $+$ ottengono due radici reali, eguali ma di segno contrario. Invece adottando il segno $-$ si hanno due radici immaginarie.

Potrebbe accadere che fosse $\frac{p^2}{4} = q$. In quest'ipotesi i valori generali di x si riducono a:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2}}.$$

Rimangono adunque due sole radici, reali se p è negativo e immaginarie ove p sia positivo. Per rendersi conto di questa particolarità conviene osservare che l'equazione data assume allora la forma:

$$x^4 + px^2 + \frac{p^2}{4} = 0,$$

che può scriversi:

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = 0,$$

ed estraendo radice quadrata dai due membri:

$$x^2 + \frac{p}{2} = 0,$$

lo che fa vedere che essa non era che apparentemente di quarto grado, ma in realtà riducibile al secondo.

L'ispezione dei valori generali dell'incognita nell'equazione biquadratica mostra che la loro determinazione dipende dal calcolo di un doppio radicale. Ora accade sovente che questo radicale è suscettibile di esser trasformato nella

somma o differenza di due radicali semplici. È perciò utile il vedere di determinare a priori le condizioni onde sia possibile la trasformazione e in tal caso indicare la maniera di effettuarla.

Sia in generale l'espressione:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}.$$

Si ponga:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

ove x e y sono quantità incognite da determinarsi convenientemente. Elevando a quadrato i due membri si ottiene:

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

Questa seconda eguaglianza che deve essere un'identità sussisterà ogni qualvolta si eguagliino fra loro rispettivamente le quantità razionali e le irrazionali dei due membri. E perciò dovrà aversi:

$$a = x + y,$$

$$\sqrt{b} = 2\sqrt{xy} \text{ donde } b = 4xy.$$

Queste due ultime equazioni ci danno il mezzo di determinare x ed y . Dalla prima difatto si cava:

$$y = a - x,$$

e sostituendo nell'altra:

$$b = 4ax - 4x^2,$$

ovvero:

$$x^2 - ax + \frac{b}{4} = 0,$$

da cui:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

e quindi:

$$y = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

Ond'è che:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Così in generale il radicale doppio dato si scinde in altri due radicali doppi e la trasformazione complica invece che semplificare. Essa solo sarà utile quando si possa avere una radice esatta dal radicale sottoposto o in altri termini quando la quantità $a^2 - b$ sia quadrato perfetto. Questa condizione si scorge immediatamente esaminando il radicale dato.

Ove invece di $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ si volesse trasformare $\sqrt{a - \sqrt{b}}$ non si avrebbe che ad eguagliarlo a $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ e si troverebbe, operando come facemmo di sopra che:

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Abbiasi per esempio l'equazione biquadratica:

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0.$$

Avendosi $p = -4$; $q = +1$ i valori della x saranno:

$$x = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}.$$

In questo caso il doppio radicale è decomponibile in due radicali semplici giacchè $2^2 - 3 = 1$ è quadrato perfetto. Si otterrà dunque mediante l'applicazioni delle formule generali suesposte:

$$\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2 + 1}{2}} \pm \sqrt{\frac{2 - 1}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}},$$

e quindi:
$$x = \pm \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right]$$

e separando le quattro radici che chiameremo α , α' , α'' , α''' :

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha' = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha'' = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha''' = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Vi son dunque quattro valori reali dell'incognita e di questi ve ne hanno due positivi e due negativi.

Sia ancora da trasformare il radicale doppio $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ che è eguale a $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$. Osserveremo dapprima che $a^2 - b = 7^2 - 48 = 1$ è quadrato perfetto è perciò la trasformazione esposta in tesi generale, darà in questa circostanza:

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} + \sqrt{\frac{7-1}{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Le formule che abbiamo date si applicano con vantaggio anche alle espressioni della forma $\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}}$. Difatto per la regola dedotta si ha $A = a$, $B = -b^2$ ed occorre che $a^2 + b^2$ sia quadrato perfetto. Ma ove questa condizione non si verifichi la trasformazione presenta nonostante una certa utilità giacchè si ha:

$$\begin{aligned} \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Il primo radicale è un'espressione essenzialmente reale, mentre il secondo è di necessità immaginario per essere $\sqrt{a^2 + b^2} > a$, talchè il cambiamento di forma ci somministra il mezzo di scindere la parte reale dalla immaginaria.

Così essendo per esempio:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{-1}},$$

..

otterremo :

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 3}{2}} \sqrt{-1}.$$

In simil guisa :

$$\begin{aligned} \sqrt{7 + 6\sqrt{-2}} &= \sqrt{\frac{7 + \sqrt{121}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{121} - 7}{2}} \sqrt{-1} \\ &= 3 + \sqrt{-2}. \end{aligned}$$

§ 14.

Modo di aver sotto forma di frazione continua la radice reale di una equazione esponenziale della forma $a^x = b$ in cui a e b sono numeri positivi.

L'equazione *esponenziale* come lo dice il suo nome è quella in cui l'incognita è in esponente, vale a dire che si tratta di trovare l'esponente della potenza alla quale occorre elevare un numero a onde produrre un altro numero pure dato b .

Supposti a e b positivi occorre distinguere i varii casi che si possono presentare secondochè detti numeri son maggiori o minori dell'unità. E per render più chiari i ragionamenti scelgasi un caso particolare nel quale per prima ipotesi supporremo tanto a che b maggiori di 1.

Sia adunque $3^x = 56$. È chiaro prima di tutto non esservi nessuna potenza intiera alla quale elevato il 3 possa prodursi 56, ma siccome $3^3 = 27$ e $3^4 = 81$ ne consegue che il numero incognito x sta compreso fra 3 e 4. Si potrà adunque porre $x = 3 + \frac{1}{y}$ ove di necessità $y > 1$.

Sostituendo questo valore di x nella equazione data, si otterrà :

$$3^{3 + \frac{1}{y}} = 56,$$

o anche : $27. 3^{\frac{1}{y}} = 56,$

e $3^{\frac{1}{y}} = \frac{56}{27},$

donde elevando a potenza y :

$$\left(\frac{56}{27}\right)^y = 3.$$

Questa seconda equazione è un'esponenziale come la primitiva e può perciò trovarsi un valore di y provando le diverse potenze di $\frac{56}{27}$. E siccome $\frac{56}{27} < 3$, mentre $\left(\frac{56}{27}\right)^1 > 3$ ne consegue che y è intermedio fra 1 e 2 e che si può stabilire:

$$y = 1 + \frac{1}{z}.$$

Sostituendo come fu fatto di sopra ne verrà:

$$\left(\frac{56}{27}\right)^{1+\frac{1}{z}} = 3,$$

ovvero: $\frac{56}{27} \cdot \left(\frac{56}{27}\right)^{\frac{1}{z}} = 3,$

donde: $\left(\frac{56}{27}\right)^{\frac{1}{z}} = \frac{81}{56},$

o anche: $\left(\frac{81}{56}\right)^z = \frac{56}{27}.$

Provando le varie potenze del numero $\frac{81}{56}$ si troverà che z è maggiore di 1 e minore del 2 e quindi potremo porre:

$$z = 1 + \frac{1}{u},$$

con che ne viene:

$$y = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{u}},$$

e:

$$x = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{u}}}$$

Ognun capisce come procedendo in modo analogo si potrà giungere ad avere il valore definitivo di x sotto la forma di una frazione continua.

Da ciò sorge naturale la domanda, se operando come fu accennato, si giungerà ad una frazione continua di numero limitato o illimitato di termini, o altrimenti se x sarà o no commensurabile. Per rispondere a tal domanda suppongansi dapprima a e b intieri e abbia la x un valore frazionario $\frac{m}{n}$; dovrà essere $a^{\frac{m}{n}} = b$ ossia $a^m = b^n$.

È prima di tutto chiaro che questa eguaglianza non può sussistere a meno che a e b non si compongano degli stessi fattori primi che noi chiameremo, ad esempio $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Siano ora p, q, r, s gli esponenti ai quali questi fattori sono elevati nel numero a e p', q', r', s' quelli da cui sono affetti in b , in guisa che si abbia:

$$a = \alpha^p \beta^q \gamma^r \delta^s, \quad b = \alpha^{p'} \beta^{q'} \gamma^{r'} \delta^{s'}.$$

Sostituendo questi valori di a e b nell'equazione $a^m = b^n$, ne viene:

$$\alpha^{mp} \beta^{mq} \gamma^{mr} \delta^{ms} = \alpha^{p'n} \beta^{q'n} \gamma^{r'n} \delta^{s'n}.$$

Questa nuova eguaglianza non può sussistere a meno che non si abbia:

$$mp = np', \quad mq = nq', \quad mr = nr', \quad ms = ns',$$

da cui si deduce:

$$\frac{m}{n} = \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s}.$$

Così onde il valore della x sia commensurabile è necessario e sufficiente che a e b sieno composti dei medesimi fattori

primi elevati ad esponenti tali che formino dei rapporti costanti.

Siano invece a e b numeri frazionari come $\frac{h}{h'} \frac{k}{k'}$, talchè:

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^m = \left(\frac{k}{k'}\right)^n, \text{ donde: } h^m k'^n = k^n h'^m.$$

Le frazioni date potendo esser sempre ridotte irreducibili ne consegue che h, h' come pure k, k' sono primi fra loro, talchè acciocchè l'eguaglianza sussista bisogna che si scinda nelle altre due:

$$h^m = k^n, \quad k'^n = h'^m$$

lo che porterà a delle condizioni analoghe a quelle sviluppate di sopra.

Allorchè il valore di x non può ottenersi se non che in frazione continua di numero illimitato di termini, la x è incommensurabile e si determina per approssimazione mediante il calcolo successivo delle ridotte della frazione continua. Così avendosi per esempio l'equazione esponenziale $2^x = 9$ e volendosi il valore dell'incognita a meno di un centesimo si svolgerà dapprima x in frazione continua colle regole indicate e trovato:

$$x = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \text{ ec.}}}$$

si faranno le varie ridotte, cioè:

$$3, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{73}{23},$$

e siccome l'errore commesso adottando l'ultima è minore di $\frac{1}{6 \times 23} = \frac{1}{138}$, così si potrà dire che si è soddisfatto alle condizioni imposte dai dati del problema col porre $x = \frac{73}{23}$. Questo valore sarà un poco più forte del vero, giacchè si

sa che le ridotte di posto pari superano sempre l'esatto valore della frazione continua.

Se a è minore dell'unità essendo sempre b maggiore della medesima l'equazione $a^x = b$ non è solubile se non che supponendo alla x un valore negativo. In tal caso chiamata a' la quantità $\frac{1}{a}$ donde $a = \frac{1}{a'}$ sarà $a' > 1$ e l'esponentiale primitiva potrà cambiarsi nell'altra:

$$\left(\frac{1}{a'}\right)^x = b \text{ e posto } x = -y, \quad \left(\frac{1}{a'}\right)^{-y} = b \text{ o anche } a'^y = b.$$

Risolta questa ultima equazione e trovato perciò un valore positivo per la y non vi sarà che a cambiarne il segno onde determinare quello di x .

In simil guisa si opererebbe ove fosse invece $a > 1$ e $b < 1$.

Se infine tanto che a che b son quantità minori dell'unità

posto:
$$a = \frac{1}{a'}, \quad b = \frac{1}{b'},$$

$$\text{ne viene } \frac{1}{a'^x} = \frac{1}{b'} \text{ ovvero } a'^x = b',$$

ove a' e b' sono maggiori di 1. Si rientra perciò nel caso primitivo.

§ 15.

Definizioni relative alle progressioni aritmetiche. Espressione del termine generale di una progressione aritmetica. Espressione della somma di un dato numero di termini. Inserzione di medi aritmetici fra due numeri dati.

Chiamasi *progressione aritmetica* o *per differenza* una serie di numeri in cui la differenza fra due numeri consecutivi è costante. Questa differenza chiamasi la *ragione* della progressione.

La progressione è *crescente* o *decrescente* secondo che i numeri vanno crescendo o scemando a partire dal primo. In quella crescente si può considerare la ragione qual quantità positiva e nella decrescente come negativa.

Le progressioni aritmetiche si scrivono come quella che segue:

$$\div 4 . 8 . 12 . 16 . 20 , \text{ ec. ,}$$

e si leggono:

$$4 \text{ sta ad } 8, \text{ sta a } 12, \text{ ec.}$$

Scelta la progressione aritmetica generale:

$$\div a . b . c . d i . k . l . ;$$

si dica δ la sua ragione, ed n il numero dei suoi termini. Noi avremo in forza delle date definizioni:

$$b = a + \delta ,$$

$$c = b + \delta ,$$

e sostituendo per b il suo valore:

$$c = a + 2\delta ,$$

$$d = a + 3\delta , \text{ ec.}$$

L'ispezione di questi valori fa vedere che un termine qualunque si forma aggiungendo al primo la ragione ripetuta tante volte quanti sono i termini che lo precedono. E siccome l'ultimo termine l ne ha $n - 1$ avanti a sè, avremo dunque:

$$l = a + (n - 1) \delta (1),$$

Così volendo il 38° termine della progressione:

$$\div 1 . 5 . 9 . 13 . 17 . \text{ ec. ,}$$

porremo: $a = 1, n = 38, \delta = 4,$

e: $l = 1 + 37 \times 4 = 149.$

In ogni progressione per differenza la somma di due termini equidistanti dagli estremi eguaglia la somma dei detti estremi.

In forza delle date definizioni abbiamo:

$$\begin{aligned} b &= a + \delta, & k &= l - \delta, \\ c &= b + \delta, & i &= k - \delta, \text{ ec.} \end{aligned}$$

Sommando membro a membro:

$$\begin{aligned} b + k &= a + l, \\ c + i &= b + k = a + l, \\ &\vdots \end{aligned}$$

lo che comprova l'asserto enunciato.

Ciò posto sarà facile il determinare la somma S di tutti i termini della progressione. Difatti possiamo scrivere:

$$S = a + b + c \dots + i + k + l,$$

o anche:

$$S = l + k + i \dots + c + b + a,$$

Sommando le due eguaglianze si ha:

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + i) \text{ ec., } \dots + (k + b) + (l + a),$$

e siccome per la dimostrazione precedente tutti i binomi del secondo membro sono eguali ad $a + l$ e d'altronde sono n di numero ne verrà:

$$2S = (a + l) n,$$

donde:
$$S = \frac{(a + l) n}{2} \dots \dots (2).$$

Così riprendendo l'esempio numerico sopra esaminato e volendo la somma dei 38 primi termini di quella progressione, si porrà $a = 1$, $l = 149$, $n = 38$, e perciò:

$$S = \frac{(1 + 149) 38}{2} = 2850.$$

Le formule (1) e (2) contengono cinque quantità, a , l , n , δ , S , e per conseguenza permettono di determinarne due

quando sien cognite le altre tre. Facendo le diverse combinazioni dei dati e delle incognite si giunge all'enunciato dei diversi problemi che seguono:

- | | | | | |
|------|------|----------------|---------|--------------|
| 1.° | Dati | a, δ, n | trovare | $l, S,$ |
| 2.° | " | a, δ, l | " | $n, S,$ |
| 3.° | " | a, δ, S | " | $l, n,$ |
| 4.° | " | a, n, l | " | $\delta, S,$ |
| 5.° | " | a, n, S | " | $\delta, l,$ |
| 6.° | " | a, l, S | " | $\delta, n,$ |
| 7.° | " | δ, n, l | " | $a, S,$ |
| 8.° | " | δ, n, S | " | $a, l,$ |
| 9.° | " | δ, l, S | " | $a, n,$ |
| 10.° | " | n, l, S | " | $a, \delta.$ |

In tesi generale la risoluzione di questi problemi si riduce a risolvere un sistema di due equazioni a due incognite, che mediante l'eliminazione si convertono in una sola equazione ad una incognita, talvolta di primo, tal'altra di secondo grado. Noi risolveremo per esercizio il 2.° e 3.° caso, avvertendo che gli altri non possono offrire difficoltà.

PROBLEMA 2.° Dato a, δ, l , trovare n ed S .

La formula (1) dà subito:

$$\frac{l - a}{\delta} = n - 1,$$

donde:
$$n = \frac{l - a}{\delta} + 1 = \frac{l - a + \delta}{\delta}.$$

Sostituendo questo valore di l nella (2) risulta:

$$S = \frac{(a + l)(l - a + \delta)}{2\delta} = \frac{l^2 - a^2 + \delta a + \delta l}{2\delta}.$$

Così per esempio, essendo il primo termine 7, l'ultimo $10\frac{3}{4}$ e la ragione $\frac{1}{4}$ troveremo:

$$n = \frac{10\frac{3}{4} - 7 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 16,$$

$$S = \frac{\left(10 \frac{3}{4}\right)^2 - 7^2 + \frac{7}{4} + 10 \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 142.$$

PROBLEMA 3.° Dati a , δ , S trovare l e n .

Preso il valore di l dalla formula (1) e portatolo nella (2) si ottiene:

$$S = \frac{(a + a + (n-1)\delta)n}{2} = \frac{(2a + n\delta - \delta)n}{2},$$

da cui: $2S = 2an + n^2\delta - n\delta,$

ovvero: $n^2 + n \frac{(2a - \delta)}{\delta} - \frac{2S}{\delta} = 0.$

da cui risolvendo:

$$n = -\frac{2a - \delta}{2\delta} \pm \sqrt{\frac{(2a - \delta)^2}{4\delta^2} + \frac{2S}{\delta}},$$

e perciò: $l = a + (n - 1)\delta =$

$$a + \delta \left[-\frac{2a - \delta}{2\delta} \pm \sqrt{\frac{(2a - \delta)^2}{4\delta^2} + \frac{2S}{\delta}} - 1 \right],$$

e riducendo:

$$l = a - \frac{2a + \delta}{2} \pm \delta \sqrt{\frac{(2a - \delta)^2}{4\delta^2} + \frac{2S}{\delta}}.$$

Vi son dunque due sistemi di valori che soddisfano all'equazioni, ma che non sempre soddisfano al problema tale come fu enunciato. Così avendosi $S = 5$, $a = 2$, $\delta = 1$ troveremo $n = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$ ovvero:

$$\begin{aligned} n &= 2, & n &= -5, \\ e \quad l &= 3, & l &= -4. \end{aligned}$$

Il primo sistema di valori di n e di l è esattissimo. Quanto al secondo il numero dei termini non potendo essere negativo è assolutamente da rigettarsi.

Se invece fosse dato $s = 27$, $a = 11$, $\delta = -2$ troveressimo:

$$n = \frac{22 + 2}{4} \pm 3,$$

ovvero: $n = 9$ ed $n = 3$,

ed $l = -5$ ovvero $l = 7$.

In questo caso tanto l'una che l'altra delle progressioni:

$$\div 11.9.7.$$

$$\div 11.9.7.5.3.1 - 1. - 3. - 5,$$

sodisfano esattamente alle imposte condizioni.

Si dice che fra due numeri si sono inseriti dei medi aritmetici quando gli stessi numeri formano con gli inseriti una progressione per differenza.

Siano adunque a ed l i numeri dati, m il numero dei medi da inserirsi; la quistione è ridotta a trovar la ragione della progressione che dee formarsi. Chiamando δ questa ragione ed osservando che il numero totale dei termini è $m + 2$ la formula (1) darà:

$$l = a + (m + 1) \delta,$$

donde:
$$\delta = \frac{l - a}{m + 1}.$$

Vogliasi ad esempio inserire 9 medi aritmetici o *differenziali* fra i numeri 2 e 5. Posto $a = 2$, $l = 5$, $m = 9$, ne verrà:

$$\delta = \frac{5 - 2}{9 + 1} = 0,3.$$

La progressione sarà perciò:

$$\div 2.2,3.2,6.2,9.3,2.3,5.3,8.4,1.4,4.4,7.5.$$

§ 16.

Definizioni relative alle progressioni geometriche. Espressione del termine generale di una progressione geometrica. Espressioni della somma e del prodotto di un dato numero di termini. Somma di tutti i termini di una progressione geometrica decrescente prolungata fino all'infinito. Inserzione di medi geometrici fra due numeri dati.

Si chiama *progressione geometrica* o *per quoziente* una serie di numeri dei quali ciascuno è eguale al prodotto di quello che lo precede per una quantità costante che si denomina *ragione* della progressione.

La progressione è *crescente* quando la ragione è un numero maggiore dell'unità; è *decrescente* nel caso contrario.

Le progressioni per quoziente si scrivono come è indicato qui sotto:

$$\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81, \text{ ec.,}$$

$$\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}, \text{ ec.,}$$

e si leggono: 1 *stà* a 3, *stà* a 9, ec., la prima è crescente con ragione 3, la seconda è decrescente di ragione $\frac{1}{2}$.

Sia la progressione generale:

$$\div a : b : c : d : \dots : k : l,$$

composta di n termini ed avente per ragione q . Noi avremo per le date definizioni:

$$b = a q$$

$$c = b q = a q^2$$

$$d = c q = a q^3, \text{ ec.}$$

vale a dire che ogni termine eguaglia il prodotto del primo per la ragione elevata ad un esponente indicato dal numero dei termini che lo precedono. Talchè l'ultimo che ne ha avanti a sè $n - 1$ verrà espresso da:

$$l = a q^{n-1} \dots \dots (1).$$

Vogliasi ora la somma S di tutti i termini della progressione. Sarà:

$$S = a + b + c + d. \dots + k + l,$$

e ponendo per b , aq , per c , bq , ec.:

$$S = a + q (a + b + c. \dots + k),$$

e siccome:

$$a + b + c. \dots + k = S - l,$$

$$S = a + q (S - l),$$

equazione che risolta rapporto ad S , dà:

$$S = \frac{ql - a}{q - 1} \dots (2).$$

Volendo porre per l il valore trovato di sopra ne viene:

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} \dots (3).$$

Quando la progressione è decrescente si ha $q < 1$ indi $aq^n < a$: conviene allora porre il valore di S sotto la forma:

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Si cerchi, per esempio, il 7.° termine e la somma dei primi sette termini nella progressione:

$$\div 2 : 4 : 8, \text{ ec.}$$

Avremo:

$$l = 2 \times 2^6,$$

e fatti i calcoli:

$$l = 128.$$

Quindi:

$$S = \frac{lq - a}{q - 1} = \frac{256 - 2}{1} = 254.$$

Invece volendo la somma dei primi 10 termini della progressione decrescente.

$$\div 81 : 27 : 9, \text{ ec..}$$

troveremo dapprima l col fare:

$$a = 81, q = \frac{1}{3} n = 10,$$

e verrà:

$$l = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{1}{243}.$$

Perciò:

$$S = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{81 - \frac{1}{729}}{\frac{2}{3}}.$$

e fatti i calcoli:

$$S = 121 \frac{121}{243}.$$

Riprendendo il valor generale di S nelle progressioni decrescenti e scrittolo sotto la forma:

$$S = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q},$$

si osserverà che siccome q è frazione q^n resulterà una quantità tanto più piccola quanto più n sarà grande, e così al crescere di n diminuirà il termine $\frac{aq^n}{1 - q}$. E perciò se si prende n grandissimo ossia si fa $n = \infty$, ne verrà $q^n = 0$ e

perciò:

$$S = \frac{a}{1 - q},$$

valore che rappresenta la somma della progressione decrescente protratta all'infinito o più esattamente parlando, il limite verso cui tende questa somma man mano che cresce il numero dei termini della stessa progressione.

Così avendosi la progressione decrescente:

$$\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} \text{ ec.,}$$

siccome $a = 1$, $q = \frac{1}{3}$ si ha per la somma all'infinito dei suoi termini:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

In una progressione per quoziente il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi eguaglia quello degli stessi estremi.

Sia la progressione:

$$\therefore a : b : c \dots \dots : i : k : l.$$

Si ha: $b = a q \dots \dots k = \frac{l}{q}$

$$c = b q \dots \dots i = \frac{k}{q}$$

$$\vdots$$

Moltiplicando le corrispondenti eguaglianze membro a membro e riducendo, si ha:

$$bk = al$$

$$ci = bk = al,$$

$$\vdots$$

come si voleva provare.

Si chiami ora P il prodotto di tutti i termini della progressione. Avremo:

$$P = abc \dots \dots ikl$$

o anche: $P = lki \dots \dots bca.$

Moltiplicando:

$$P^2 = (al) (bk) (ci) \dots \dots (kc) (la).$$

Osservando che tutti i binomi del secondo membro sono eguali fra loro, eguali ad al e sono n di numero, otterremo:

$$P^2 = (al)^n \text{ e } P = \sqrt[n]{(al)^n}.$$

Le eguaglianze (1) e (2) contenendo cinque quantità, a , l , n , q , s somministrano il mezzo di determinarne due quando le altre tre sono cognite. Fra i dieci problemi che si posson proporre quattro soli son suscettibili di essere risolti con facilità; gli altri dipendono da equazioni di grado superiore al secondo o esponenziali. Ecco i dati dei primi:

1.° Dati a , q , n trovare l , S . Si troverà:

$$l = a q^{n-1}, \quad S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

2.° Dati a , n , l trovare q , S .

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}, \quad S = \frac{\sqrt[n-1]{l^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

3.° Dati q , n , l trovare a , e S .

$$a = \frac{l}{q^{n-1}}, \quad S = \frac{l(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}.$$

4.° Dati q , n , S trovare a e l .

$$a = \frac{S(q - 1)}{q^n - 1}, \quad l = \frac{S q^{n-1}(q - 1)}{q^n - 1}.$$

Si chiamano *medii geometrici* o *proporzionali* fra due numeri dati una serie di altri numeri che insieme coi primi formano una progressione per quoziente.

Dati due numeri a , l vogliasi fra i medesimi inserire m medii geometrici. Il problema è naturalmente ridotto a determinare la ragione della progressione che si forma. Il numero totale dei termini dovendo così essere di $m + 2$, l'eguaglianza (1) diviene:

$$l = a q^{m+1},$$

da cui:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$$

vale a dire che dopo aver divisi i numeri dati un per l'altro devesi estrarre dal quoziente una radice di un'unità superiore al numero dei medii che devonsi inserire.

§ 17.

Definizione dei logaritmi. Loro proprietà generali.

Si chiama *logaritmo* di un numero l'esponente della potenza a cui occorre elevare un certo numero invariabile onde riprodurre il primo numero. Il numero invariabile prende il nome di *base*. Essendo adunque a la base, y un numero, x il suo logaritmo, dovremo avere:

$$y = a^x.$$

E perciò la determinazione del logaritmo di un numero esige la risoluzione di un'equazione esponenziale.

La base a può esser più grande o più piccola dell'unità. Nel primo caso facendo:

$$x = 0, 1, 2, 3,$$

risulta: $y = 1, a, a^2, a^3, \text{ ec.,}$

oppure posto:

$$x = 0, -1, -2, -3, \text{ ec.,}$$

$$y = 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}.$$

Da ciò ne viene che i logaritmi dei numeri maggiori dell'unità son positivi, mentre quelli dei numeri inferiori all'unità son negativi.

Se $a < 1$, vale a dire eguaglia una frazione $\frac{1}{a}$, dall'equazione:

$$y = \frac{1}{a^x},$$

posto: $x = 0, 1, 2, 3, \text{ ec.,}$

viene: $y = 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \text{ ec.,}$

e invece: $x = 0, -1, -2, \text{ ec.,}$

si ottiene: $y = 1, a, a^2, \text{ ec.,}$

lo che prova che essendo la base minore dell'unità i logaritmi dei numeri maggiori di 1 son negativi, mentre invece son positivi quelli dei numeri minori dell'unità.

In qualunque sistema di logaritmi, il logaritmo di 1 è zero, mentre quello della base è l'unità.

Difatti se nell'equazione $a^x = y$ vi si fa $y = 1$ si ottiene $x = 0$ qualunque sia a . E se invece si pone $y = a$ ne viene $x = 1$.

L'ispezione dei numeri paragonata a quella dei loro logaritmi, fa vedere che mentre i primi costituiscono una progressione per quoziente, i secondi ne formano invece una per differenza. È poi facile il vedere che questa proprietà si estende ai numeri intermedi fra due termini qualsiasi purchè naturalmente corrispondano nelle due progressioni. Talchè, per esempio, se fra 1 e 2 si inseriscono m medi aritmetici e fra a ed a^2 , m medi geometrici il p^{esimo} della prima serie sarà il logaritmo del p^{esimo} termine della seconda serie. Difatto per le cognite teorie delle progressioni questi termini hanno il valore rispettivo:

$$1 + (p - 1) \frac{1}{p + 1} \dots\dots\dots (\alpha).$$

$$a \left(\sqrt[p+1]{a} \right)^{p-1} = a^{1 + \frac{p-1}{p+1}} \dots\dots\dots (\beta).$$

L'espressione (α) è per l'appunto l'esponente di a in quella (β) ; ne è perciò il logaritmo.

Il logaritmo di un prodotto eguaglia la somma dei logaritmi dei suoi fattori. Sieno y, y', y'' ec., diversi numeri, x, x', x'' ec. i loro logaritmi nel sistema di base a ; noi avremo

$$y = a^x, y' = a^{x'}, y'' = a^{x''} \text{ ec.,}$$

e perciò moltiplicando:

$$yy'y'' \text{ ec.} = a^{x+x'+x'' \text{ ec.}}$$

La quantità $x + x' + x''$ ec., essendo perciò l'esponente cui deve elevarsi a onde produrre $yy'y''$ ec., ne rappresenta il logaritmo e si ha indicando per abbreviazione il logaritmo colla caratteristica *log.*:

$$\log. yy'y'' \text{ ec.} = x + x' + x'' + \text{ec.},$$

ovvero:

$$\log. yy'y'' \text{ ec.} = \log. y + \log. y' + \log. y'' + \text{ec.}$$

Il logaritmo di una frazione equaglia il logaritmo del suo numeratore meno quello del denominatore.

Sieno x, x' i logaritmi dei numeri y, y' nel sistema di base a ; avremo:

$$y = a^x, \quad y' = a^{x'},$$

e dividendo membro a membro:

$$\frac{y}{y'} = a^{x-x'},$$

$x - x'$ è dunque il logaritmo di $\frac{y}{y'}$, e si ha:

$$\log. \frac{y}{y'} = x - x' = \log. y - \log. y',$$

come volevasi provare.

Il logaritmo di una potenza equaglia l'esponente della medesima moltiplicato pel logaritmo del numero che si eleva a potenza.

Essendo x il logaritmo di y talchè $y = a^x$, si elevi da ambo i lati alla potenza $\frac{m}{n}$; avremo:

$$y^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mx}{n}},$$

talchè:

$$\log. y^{\frac{m}{n}} = \frac{mx}{n} = \frac{m}{n} \log. y.$$

Se si suppone $m = 1$ ne viene:

$$\log. y^{\frac{1}{n}} = \log. \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n} \log. y.$$

Ciò fa vedere che:

Il logaritmo di una radice equaglia il quoziente del logaritmo del numero per l'indice della radice.

Per completare le generalità sui logaritmi, occorre ora far vedere come immaginando costruita una tavola qualunque che contenesse i logaritmi dei numeri in un sistema di data base, si possa con facilità passare a formarne un'altra che ci somministri gli stessi logaritmi quando siasi cambiata la base. A quest'oggetto si indichi con a l'antica base, con b la nuova e con N un numero qualunque. Sia anche $\log. N$ quello nel sistema a ; avremo dapprima:

$$b^x = N,$$

da cui presi i logaritmi nel sistema a :

$$x \log. b = \log. N,$$

$$x = \frac{\log. N}{\log. b} = \log. N \frac{1}{\log. b}.$$

Per un altro numero N' di logaritmo x' avressimo parimente ottenuto:

$$x' = \log. N' \frac{1}{\log. b},$$

ed in generale *ad ottenere i nuovi logaritmi basta moltiplicare i primitivi per la quantità costante $\frac{1}{\log. b}$* . Questa quantità dicesi *modulo di passaggio* dal sistema a al sistema b .

§ 18.

Sistema dei logaritmi ordinarii. Uso delle tavole.

Fra le diverse basi che si potevano scegliere per la costruzione di tavole logaritmiche, si è scelto il numero 10. Il sistema di logaritmi in uso dicesi perciò *decimale* o anche

dei *logaritmi ordinarii*. Questi logaritmi sono espressi dal simbolo *log*. Ad ottenere i logaritmi dei diversi numeri basta perciò risolvere l'esponenziale $10^x = y$ coi metodi cognitivi e ricavarne i valori di x per ognuno speciale di y . Gioverà intanto riflettere che per:

$$y = 1, 10, 100, 1000 \text{ ec.},$$

si ha: $x = 0, 1, 2, 3 \text{ ec.},$

mentre per valori di y intermedi fra 1 e 10, oppure 10 e 100 ec. i valori di x non possono calcolarsi che in modo approssimativo, in frazione ordinaria o decimale. Siamo dunque condotti alla conclusione naturale, che cioè *la massima parte dei logaritmi non si ottengono che in modo approssimativo*.

Le tavole di logaritmi che si adoperano nella pratica non furono naturalmente calcolate col lungo e difficile processo dell'equazione esponenziale, esse vennero costruite in altra maniera della quale però non è qui il caso di occuparsi.

I logaritmi che non sono esatti constano adunque di una parte intera che può anche esser zero e di una parte decimale. La parte intera si chiama *caratteristica*; quella decimale *mantissa*.

La caratteristica del logaritmo di un numero intero è sempre un'unità minore delle cifre del numero stesso.

Difatto i numeri compresi fra 0 e 10 e perciò di una sola cifra hanno per caratteristica zero, quelli che stanno fra 10 e 100 hanno la caratteristica 1 e così di seguito.

È perciò inutile che le tavole diano le caratteristiche, ma è invece necessario che vi si trovino le mantisse.

Fra le diverse tavole che si usano le più comuni sono le grandi di Callet a 7 decimali e le piccole di Lalande a 5 decimali. Esistono anche delle edizioni di piccole tavole estese a 7 decimali. Noi descriveremo le tavole di Callet rivedute da Dupuis (ediz. 1862), come quelle che permettono di fornire ai calcoli una buona esattezza. Queste tavole si estendono dal n. 1 fino al n. 100000 e non portano caratteristiche.

Le prime due pagine contengono i logaritmi dei numeri intieri dall' 1 al 1000 inclusive. I numeri sono scritti per le prime due cifre nella colonna a sinistra intestata *N* e per la terza cifra in dieci caselle che sono in testa della tavola. E così onde ritrovare ad esempio il logaritmo di 793 si cerca a sinistra 79 e progredendo orizzontalmente fino all'incontro della verticale che è intestata 3 si trova questo logaritmo.

Nelle altre pagine seguono i logaritmi dei numeri intieri dal 1000 al 100000 sempre colle prime cifre a sinistra e l'ultima disposta come fu accennato di sopra. Le prime tre cifre decimali del logaritmo che generalmente son comuni a molti logaritmi successivi son trascritte nella colonna dello zero e le altre colonne contengono solo le quattro cifre che differenziano un logaritmo dall' altro. E quando in una stessa colonna orizzontale si passa da una triade alla susseguente questo passaggio è contrassegnato da un asterisco. Infine l'ultima colonna a dritta è intestata. *Diff. p. p.* (Differenza; parti proporzionali). Noi vedremo bentosto a che serva lo scrivere questa differenza di due logaritmi consecutivi con i suoi decimi dall' 1 al 9.

Del resto un'occhiata data alle tavole servirà meglio di ulteriori descrizioni a comprendere il modo con cui sono disposte.

I problemi che naturalmente siam condotti a risolvere sono quelli di trovare il logaritmo di un numero dato e l'inverso di rintracciare il numero corrispondente ad un dato logaritmo. Il 1° problema comprende quattro casi secondo che il numero è intiero e racchiuso nei limiti delle tavole: è intiero ma esce dai limiti delle tavole; è frazione decimale, oppure ordinaria.

PROBLEMA 1.° CASO 1.° Abbiasi da trovare il logaritmo di 77104. A pag. 139 delle tavole troveremo facilmente questo logaritmo e riflettendo che il numero ha cinque cifre e che perciò la caratteristica del logaritmo deve essere 4 troveremo:

$$\log. 77104 = 4, 8870769.$$

PROBLEMA 1.° CASO 2.° Sia il numero 398274 che esce dai limiti delle tavole. Questo numero sta compreso fra 398270 e 398280 e perciò il logaritmo del medesimo è intermedio per certo fra quelli dei detti numeri. Ora per un teorema dimostrato essendo 398270 il prodotto di 39827 per 10 si avrà:

$$\log. 398270 = \log. 39827 + \log. 10$$

ed essendo anche $\log. 10 = 1$ ne consegue che noi avremo la mantissa del logaritmo di 398270 prendendo quello di 39827. In simil guisa al posto del logaritmo di 398280 si potrà cercare quello di 39828 che è sulle tavole. Sfogliando queste tavole si trova per le mantisse dei due logaritmi.

Per 39827 6001776

• 39828 6001885.

Il vero logaritmo sta in mezzo a questi due la cui differenza è 109. A determinarlo si suppone che gli accrescimenti dei numeri sien proporzionali a quelli dei loro logaritmi, lo che a rigore non è vero, ma non porta errore sulla settima cifra decimale, come si prova con teorie che non è qui il caso di svolgere. E perciò siccome dal 398270 al 398280 corrono dieci unità, mentre dal 398270 al 398274 ve ne corrono 4, stabiliremo la proporzione:

$$10 : 109 :: 4 : x$$

ed:
$$x = \frac{4}{10} \times 109 = 43,6 = 44 \text{ circa.}$$

Potevamo anche in questo caso risparmiarci questo calcolo, giacchè la colonna *diff. p. p.* ci dava subito $\frac{4}{10}$ del 109. Ond'è che se alla mantissa 6001776 si aggiunge 44 il risultato 6001820 esprimerà la mantissa del logaritmo cercato. E siccome il numero ha sei cifre, la caratteristica dovrà esser 5 ed avremo in definitivo:

$$\log. 398274 = 5, 6001820.$$

PROBLEMA. 1.° CASO. 3.° Il numero è frazionario decimale. Per risolvere in modo completo questo caso dimostreremo dapprima un principio che abbiamo traveduto nel caso precedente. Esso è che: moltiplicando un numero per una potenza intiera del 10 non cambia la mantissa del suo logaritmo.

Sia a il numero; avremo per le note proprietà generali dei logaritmi:

$$\log. a \times 10^n = \log. a + \log. 10^n = \log. a + n;$$

n essendo intiero, il principio riman dimostrato.

Ciò posto sia per primo esempio 7, 691.

Siccome: $7,691 = \frac{7691}{1000}$

così: $\log. 7,691 = \log. 7691 - 3,$

e siccome: $\log. 7691 = 3,8859828,$

così: $\log. 7,691 = 0,8859828.$

Sia per secondo esempio da trovare il logaritmo di 0,33804.

Siccome: $0,33804 = \frac{33804}{100000}$

così: $\log. 0,33804 = \log. 33804 - 5.$

Ora dalle tavole si ha:

$$\log. 33804 = 4,5289681,$$

perciò sottraendovi 5 otterremmo:

$$\log. 0,33804 = -0,4710319.$$

Il numero dato essendo minore dell'unità è naturale che il suo logaritmo sia negativo, ma siccome d'altra parte questi logaritmi negativi son molto incomodi nella pratica si è pensato di lasciar positiva la loro mantissa e negativa la caratteristica che si indica allora con una lineetta situata sopra.

E così invece di sottrarre 5 dal logaritmo 4,5289687 si sottrae 5 da 4 e siccome il residuo è -1 , si scrive:

$$\log. 0,33804 = \overline{1},5289687.$$

1.° PROBLEMA. 4.° CASO. Abbiassi la frazione ordinaria $\frac{8}{173}$ di cui si ricerca il logaritmo. Per un principio già dimostrato, si ha:

$$\log. \frac{8}{173} = \log. 8 - \log. 173,$$

e siccome:

$$\log. 8 = 0,9030900$$

$$\log. 173 = 2,3380461$$

$$\log. \frac{8}{173} = \overline{2},5650439$$

PROBLEMA. 2.° Dato un logaritmo trovare il numero corrispondente. Sia per esempio $\log. x = 3,8512174$. Andando a sfogliare le tavole ci arresteremo a quel logaritmo la cui mantissa si approssima più di ogni altra per difetto a quella data. Nel nostro caso essa è 8512155 ed ha per numero corrispondente 70993. Ma siccome questa mantissa è al disotto della vera, il numero x supererà il 70993 e sarà inferiore al 70994. Osservato ora che la differenza tabulare è 61 e supposto sempre che vi sia proporzione fra gli accrescimenti dei numeri e quelli dei logaritmi, se si dice y la quantità di cui deve aumentarsi il numero 70993, sic-

come:
$$8512174 - 8512155 = 19,$$

avremo per determinarlo la proporzione:

$$61 : 1 :: 19 : y = \frac{19}{61} = 0,3 \text{ circa.}$$

E perciò il numero richiesto sarà 70993,3 oppure uno dei suoi multipli o submultipli ottenuti col moltiplicarlo o dividerlo per 10. Per fissarlo esattamente si osservi che la caratteristica del logaritmo essendo 3 il numero deve avere

4 cifre intiere e perciò è espresso da 7099,33 coll'approssimazione di un centesimo.

Risolti così i problemi generali che si riferiscono all'uso delle tavole avanti di passare a qualche esempio di calcolo di espressioni numeriche per logaritmi ci rimane a dir qualche cosa sui complementi.

Si chiama *complemento aritmetico* di un numero intiero o decimale ciò che gli manca a fare 10 unità intiere. Detto adunque a un numero, *compl. a* il suo complemento si ha la relazione:

$$a + \text{compl. } a = 10.$$

Ond'è che se il numero a deve esser sottratto dall'altro b si può cambiare la sottrazione in addizione aggiungendo a b la quantità *compl. a* e sottraendo quindi 10. Difatto essendo:

$$a = 10 - \text{compl. } a,$$

sarà:
$$b - a = b + \text{compl. } a - 10.$$

I complementi servono appunto a trasformare varie sottrazioni in addizioni ed abbreviano così i calcoli.

È chiaro poi che ad ottenere in modo pratico e pronto il complemento di un decimale, basta sottrarne la prima cifra significativa a dritta da 10 e tutte le altre da 9.

Esempi di calcoli per logaritmi. Vogliasi valutare l'espressione:

$$x = 240 \sqrt[3]{\left[\frac{728,4}{\sqrt{5}}\right]} \times \sqrt{8,94}.$$

Applicando i principi generali avremo dapprima:

$$\begin{aligned} \log. x = \log. 240 + \frac{1}{3} \left[\log. 728,4 + \text{compl. } \frac{1}{2} \log. 5 - 10 \right] \\ + \frac{1}{2} \log. 8,94. \end{aligned}$$

Ora si ha:

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{Log. } 240 = & \dots\dots\dots 2,3802112. \\
 \text{log. } & \dots\dots 728,4 = & 2,8623699. \\
 \text{compl. } & \frac{1}{2} \text{ log. } 5 = & 9,6505150 \\
 & - 10 & \\
 & \hline
 & . 2,5128849
 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \left[\text{log. } 728,4 + \text{compl. } \frac{1}{2} \text{ log. } 5 - 10 \right] = \dots\dots\dots 0,8376283.$$

$$\frac{1}{2} \text{ log. } 8,94 = \dots\dots\dots 0,4756687$$

$$\text{Log. } x = \dots\dots\dots 3,6935082$$

e perciò andando coi metodi cognitivi alla ricerca del numero corrispondente si troverà $x = 4937,51$.

Sia per secondo esempio da calcolarsi l'espressione:

$$x = \sqrt[15]{\frac{28 + 6 \sqrt[3]{181}}{\sqrt[4]{19}}}.$$

Prima di tutto cominceremo a determinare il valore del radicale $6 \sqrt[3]{181}$ che deve aggiungersi al 28. Chiamandolo y otterremo:

$$\text{log. } y = \text{log. } 6 + \frac{1}{3} \text{ log. } 181.$$

$$\text{Ma: } \text{log. } 6 = \dots\dots\dots 0,7781513$$

$$\frac{1}{3} \text{ log. } 181 = \dots\dots\dots 0,7525595$$

$$\text{log. } y = \dots\dots\dots 1,5307108$$

Cercando il numero corrispondente si trova:

$$y = 33,939.$$

$$\text{Quindi: } y + 28 = 61,939.$$

$$\text{Log. } x = \frac{1}{15} \left[\log. 61, 939 + \text{comp. } \frac{1}{4} \log. 19 - 10 \right].$$

Ora :	<i>log.</i> 61, 939 =	1, 7919642
	<i>comp.</i> $\frac{1}{4}$ <i>log.</i> 19 =	9, 6803116
		1, 4722758
	— 10	15
	<i>log.</i> <i>x</i> =	0, 0981517

e perciò trovato il numero corrispondente $x = 1, 2535$ circa.

Ognun vede come l'uso dei logaritmi serva ad abbreviare di gran lunga i calcoli, giacchè essi sarebbero stati laboriosissimi ove si fosse dovuto procedere direttamente all'estrazione delle tre radici che entrano nel valore complesso di x .

Fra le tante applicazioni che possono farsi del calcolo logaritmico merita special menzione quella alla risoluzione dell'equazione esponenziale. Abbiassi, per esempio:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = 50,$$

prendendo i logaritmi da ambo i lati viene:

$$x [\log. 4 - \log. 3] = \log. 50,$$

e quindi:
$$x = \frac{\log. 50}{\log. 4 - \log. 3} = \frac{1, 6989700}{0, 1249387}.$$

Facendo i calcoli si ha:

$$x = 13, 597 \text{ circa.}$$

È certo che avremmo dovuto calcolar lungo tempo prima di avere questo valore dal metodo delle frazioni continue.

§ 19.

Problemi relativi all'interesse composto e alle annualità.

Si dice che una somma è posta ad *interesse composto* allorchè gli interessi che scadono alla fine di ogni anno non vengono ritirati, ma invece si accumulano col capitale onde produrre a lor volta nuovi interessi e così si va proseguendo per un determinato numero di anni.

Sia adunque C un capitale qualsiasi impiegato ad interesse composto per n anni alla tassa r per $\%$. Il suo interesse nel primo anno sarà (*W. aritmetica*). $\frac{Cr}{100}$ e perciò la somma C diverrà:

$$C + \frac{Cr}{100} = C \left(1 + \frac{r}{100} \right) = C'.$$

Il capitale C' frutta nel secondo anno $\frac{C'r}{100}$, diviene

$$C' \left(1 + \frac{r}{100} \right) \text{ e posto per } C' \text{ il suo valore, } C \left(1 + \frac{r}{100} \right)^2.$$

Proseguendo a ragionare in simil guisa si troverebbe che alla fine del terzo anno il capitale divenne $C \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3$ ed infine generalizzando e chiamando con M il valore della somma dopo n anni avremo per analogia:

$$M = C \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n.$$

Questa formula contenendo quattro quantità M , C , r , n permette di determinarne una quando le altre son cognite. Essa dà luogo perciò alla risoluzione di quattro problemi.

1.° PROBLEMA. Dato C , r , n trovare M .

Si ha:

$$M = C \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n.$$

Per calcolare più facilmente volendo applicare i logaritmi si ottiene:

$$\log. M = \log. C + n \log. \left(1 + \frac{r}{100} \right).$$

ESEMPIO. Cosa diviene un capitale di Ln. 5000 lasciato al 4 per % per 30 anni?

Si ha: $\log. M = \log. 5000 + 30 \log. 1,04.$

Ma: $\log. 5000 = 3,6989700$
 $30 \log. 1,04 = 0,5109990$

Indi: $\log. M = 4,2099690$

Cercato il numero corrispondente si trova:

$$M = 16216,94 \text{ circa.}$$

Quando il numero degli anni pel quale il capitale fu posto ad interesse non è intiero la formula precedente non può applicarsi. Occorre allora determinare il risultato corrispondente al numero intiero di anni immediatamente inferiore al tempo di cui si tratta, indi aggiungervi gli interessi per la frazione di anno dapprima trascurata.

E così se nell'esempio di sopra fosse stato dato il tempo in anni 30 e mesi 3, si aggiungerebbe alla somma 16216,94 il suo interesse al 4 per % in tre mesi e siccome questo interesse è 162,16 si avrebbe in definitiva effettuando la somma:

$$M = 16379,10.$$

PROBLEMA 2.° Dato M, r, n trovare C .

Si ha:
$$C = \frac{M}{\left(1 + \frac{r}{100} \right)^n}$$

ed applicando i logaritmi:

$$\log. C = \log. M - n \log. \left(1 + \frac{r}{100} \right).$$

ESEMPIO. Si voglia sapere qual somma deve oggi situarsi ad interesse composto del 6 per % onde nel lasso di 21 anno sia diventata 3500^{1a}.

In questo caso speciale:

$$M = 3500, n = 21, r = 6.$$

Ora:	$\log. M = \dots\dots\dots$	3, 5440680
	$21 \log. 1, 06 = \dots\dots\dots$	0, 5314239
		3, 0126441
Indi:	$\log. C = \dots\dots\dots$	3, 0126441

e perciò cercando il numero corrispondente:

$$C = 1029, 54.$$

PROBLEMA 3.° Dato C , M , r trovare n .

Si ha:
$$\frac{M}{C} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n,$$

e perciò prendendo i logaritmi:

$$\log. M - \log. C = n \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right),$$

donde:
$$n = \frac{\log. M - \log. C}{\log. \left(1 + \frac{r}{100}\right)}.$$

ESEMPIO. Si domanda quanti anni debba tenersi ad interesse composto un capitale di 5000 lire onde alla tassa del 5 per % divenga 8000 lire.

Sarà: $M = 8000, C = 5000, r = 5,$
e perciò:

$$n = \frac{\log. 8000 - \log. 500}{\log. 1, 05} = \frac{0, 2041200}{0, 0211893}.$$

Facendo la divisione $n =$ anni 7 mesi 7 giorni 17.

Questo risultato non può ritenersi esattamente per vero, per la solita ragione che la formula non è applicabile del

tutto al caso di n frazionario. Però l'approssimazione è sufficientissima per gli usi della pratica.

Un esercizio che dipende dal problema in quistione si è quello di determinare quanto tempo occorre ad un capitale per raddoppiarsi allorchè è cognita la quota d'interesse composto a cui venne situato. Per risolvere la quistione, per esempio, nel caso in cui la quota è del 6 per % basta nella formula generale porre $M = 2 C$, con che avremo:

$$2 = (1,06)^n,$$

ed:
$$n = \frac{\log. 2}{\log. 1,06} = \frac{0,3010300}{0,0253059},$$

e fatto i calcoli:

$$n = \text{anni 11 mesi 10 giorni 22.}$$

4.° PROBLEMA. Dati C , M , n trovare r , si avrà:

$$\frac{M}{C} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

e prendendo i logaritmi:

$$\log. M - \log. C = n \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right),$$

donde:
$$\log. \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{\log. M - \log. C}{n}.$$

Trovato il numero $1 + \frac{r}{100}$ sottraendovi l'unità avremo $\frac{r}{100}$ e moltiplicando quindi per 100 si avrà r .

ESEMPIO. Si voglia sapere a che tassa deve esser situato un capitale di L. 3000 onde in 8 anni divenga 5800. Dovremo porre nelle formule:

$$M = 5800, C = 3000, n = 8,$$

e perciò si avrà:

$$\begin{aligned} \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right) &= \frac{\log. 5800 - \log. 3000}{8} = \\ &= \frac{3,7634280 - 3,4771213}{8} = 0,0357883. \end{aligned}$$

Trovato il numero corrispondente a questo logaritmo ne verrà: $1 + \frac{r}{100} = 1,0858$ e perciò $\frac{r}{100} = 0,0858$,

ed infine: $r = 8,58$.

Si chiama *rendita perpetua* una rendita che si riscuote alla fine di ogni anno per un tempo indefinito. Il valore del capitale necessario a produrla è determinato dalle formule dell'interesse semplice. Chiamando con a questa rendita, con r la tassa, e C il capitale si ha:

$$C = \frac{100 a}{r},$$

Con questo capitale posto a frutto si potrà incominciare dopo un anno a ritirare la rendita a ed averla in perpetuo.

PROBLEMA. *Determinare il capitale necessario a produrre una rendita perpetua a il cui primo pagamento scade dopo n anni.*

Dopo $n - 1$ anni il pagamento della rendita avrà luogo fra un anno e perciò il capitale necessario a produrla sarà $\frac{100 a}{r}$. Occorre dunque che il capitale attuale che si cerca posto ad interesse composto per $n - 1$ anni divenga $\frac{100 a}{r}$. Per quello che sappiamo indicandolo con N , avremo dunque:

$$N = \frac{\frac{100 a}{r}}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1}}.$$

Applicando i logaritmi a questa formula otterremo:

$$\log. N = 2 + \log. a + \text{comp. log. } r + \\ \text{comp. } (n - 1) \log. \left(1 + \frac{r}{100}\right) - 20.$$

ESEMPIO. Si cerchi il capitale necessario a produrre una rendita perpetua di 800 lire il cui primo pagamento scada

frà 18 anni. Dovrà essere $a = 800$, $n = 18$ e se si suppone l'interesse del 6 per $\%$, $r = 6$. Quindi:

$$\log. N = 2 + \log. 800 + \text{comp. log. } 6 + \\ \text{comp. } 17 \log. 1,06 - 20.$$

Ma:	$\log. 800 =$	2,9030900
	$\text{comp. log. } 6 =$	9,2218487
	$\text{comp. } 17 \log. 1,06 =$.	9,5697997
			2,0000000
			<hr/>
			23,6947384
			— 20
			<hr/>
indi:	$\log. N =$	3,6947384

Cercato il numero corrispondente si troverà $N = 4951,51$ circa.

Si chiama *annualità* una rendita pagabile per un numero limitato di anni. Si intende adunque che situato un capitale ad interesse composto si esige di esser rimborsati per rate annue eguali del capitale, suoi interessi ed interessi degli interessi in un determinato periodo di tempo.

Proponiamoci adunque di determinare le relazioni necessarie a risolvere i vari problemi che posson venir proposti sulle annualità.

Sia A il capitale, a l'annualità, r la tassa, n il tempo espresso in anni. Il capitale A in n anni diviene:

$$A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

La prima annualità a pagata alla fine del primo anno diverrebbe in $n - 1$ anni:

$$a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1}.$$

La seconda diverrebbe:

$$a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-2},$$

la terza: $a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-3},$

e così di seguito fino all'ultima a .

Dobbiamo adunque avere l'eguaglianza:

$$A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1} + a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-2} \text{ ec. } + a.$$

Ora il 2° membro esprime la somma di una progressione per quoziente che ha per termini estremi $a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1}$ ed a e per ragione $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$. Esso può adunque anche indicarsi con:

$$\frac{a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - a}{1 + \frac{r}{100} - 1} = a \frac{\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\right]}{\frac{r}{100}}.$$

Abbiamo perciò:

$$(x) \dots A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = \frac{100 a \left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\right]}{r},$$

ed è questa la relazione cercata.

Una tal formula contenendo quattro quantità cioè A , a , r , n , permette di determinarne una quando son cognite le altre tre e dà perciò luogo a quattro problemi differenti.

PROBLEMA 1. Dati a , r , n , trovare A . L'equazione (x) risoluto rapporto ad A dà:

$$A = \frac{100 a}{r} \left[\frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n} \right].$$

Per applicare utilmente i logaritmi a questo risultato fa d'uopo dapprima calcolare il valore dell'espressione:

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

Indicando il numero che la rappresenta con m ne verrà:

$$A = \frac{100 a (m - 1)}{r m}.$$

Quindi:

$$\log. A = 2 + \log. a + \log. (m - 1) + \text{comp. log. } r \\ + \text{comp. log. } m - 20:$$

ESEMPIO. Vogliasi sapere qual'è il capitale necessario a procurarsi al 7 per % un'annualità di lire 1200 per 8 anni. Dovremo porre:

$$a = 1200, r = 7, n = 8.$$

E siccome:

$$\log. m = 8 \log. 1,07 = 0,2350704,$$

si troverà:

$$m = 1,7181 \text{ e } m - 1 = 0,7181.$$

Passando quindi al calcolo di A :

	2,0000000
$\log. 1200 =$	3,0791812
$\log. 0,7181 =$	1,8561849
$\text{comp. log. } 7 =$	9,1549020
$\text{comp. log. } 1,7181 =$	9,7649296
	<hr/>
	23,8551977
	- 20
$\log. A =$	3,8551977

e quindi mediante le tavole $A = 7164,69$.

PROBLEMA 2.° Dati A, r, n trovare a . La formula (α) risolta rapporto ad a dà:

$$a = \frac{r A}{100} \left[\frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1} \right],$$

e mediante la consueta posizione,

$$a = \frac{r A m}{100 (m - 1)},$$

e perciò applicando i logaritmi:

$$\log. a = \log. r + \log. A + \log. m + \text{comp. log. } (m - 1) + 8 - 20.$$

ESEMPIO. Vogliasi sapere quale annualità può ricavarsi da un capitale di 6500 Ln. nel periodo di 6 anni al 6 $\frac{1}{2}$ per $\%$. Occorrerà fare:

$$A = 6500, n = 6, r = 6, 5,$$

e avremo dapprima:

$$\log. m = 6 \log. 1, 065 = 0, 1640976,$$

da cui: $m = 1, 4591$ e $m - 1 = 0, 4591$.

Passando quindi al calcolo di a :

$\log. 6, 5 =$...	0, 8129134
$\log. 6500 =$...	3, 8129134
$\log. 1, 4591 =$...	0, 1640976
$\text{comp. log. } 0, 4591 =$...	10, 3380927
		8, 0000000
		23, 1280171
		- 20
$\log. a =$		3, 1280171

Cercato il numero corrispondente si trova $a = 1342, 81$ circa.

PROBLEMA 3.° Dati A, a, r trovare n . L'equazione (x) può porsi sotto la forma:

$$\frac{r A}{100 a} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n}$$

donde si trae:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n} = 1 - \frac{r A}{100 a} = \frac{100 a - r A}{100 a},$$

quindi: $\left(1 + \frac{100}{r}\right)^n = \frac{100 a}{100 a - r A},$

e passando ai logaritmi:

$$n = \frac{\log. 100 a - \log. (100 a - r A)}{\log. \left(1 + \frac{r}{100}\right)}.$$

ESEMPIO. Sia proposto di determinare per quanto tempo potrà percepirsi un'annualità di 970 Ln. da un capitale di Ln. 12000 che si suppone situato al 5 $\frac{3}{4}$ per $\%$. Dovremo fare nelle formule.

$$A = 12000, a = 970, r = 5,75,$$

$$\text{e perciò: } 100 a - r A = 97000 - 69000 = 28000$$

$$\text{Indi: } n = \frac{\log. 97000 - \log. 28000}{\log. 1,0575},$$

da cui fatti i calcoli si deduce:

$$n = \text{anni 22 mesi 2 giorni 27.}$$

PROBLEMA 4.^o Dato a , A , n trovare r . Questo problema non può risolversi elementarmente colla formola (α), ma siccome non ha nessuna importanza pratica stimiamo inutile intrattenersene.

Si chiama *vitalizio* l'operazione per la quale un individuo cede ad altri tutti i suoi averi in cambio di una annualità da ritirarsi per tutta la durata della sua vita. Ond'è che i problemi proponibili sui vitalizi si ridurrebbero a problemi di annualità qualora si potesse conoscere il tempo pel quale vivrà l'individuo che fa il vitalizio. Questo tempo non è naturalmente determinabile, ma si può desumere con una certa approssimazione dalle *tavole di mortalità* costruite dietro i risultati dell'esperienza. E così una volta basativi sopra tutti i calcoli, l'operazione sarà vantaggiosa o no all'individuo che accetta il vitalizio secondochè l'altro contrattante morirà prima o dopo dell'epoca assegnata dalle suddette tavole di mortalità.

L' *affrancamento* del vitalizio vale a dire la determinazione del capitale da restituirsi in corrispondenza della rendita vitalizia, dell'età del godente e della tassa d'interesse rientra pure dopo l'esame delle tavole di mortalità nelle quistioni già sviluppate e precisamente si riferisce al problema 1.° sulle annualità.



PROGRAMMA QUARTO

TRIGONOMETRIA RETTILINEA.

§ 1.

Definizioni delle varie linee trigonometriche di un arco di circolo. Relazione fra le medesime. Come varino le linee trigonometriche di un arco col variare di questo. Espressione delle linee trigonometriche degli archi maggiori di 90° in funzione delle linee trigonometriche di archi non maggiori di 90° .

Si chiama *trigonometria rettilinea* quella parte delle matematiche che insegna a determinare tre elementi di un triangolo rettilineo quando son cogniti gli altri tre, purchè fra questi ultimi siavi un lato.

Onde poter stabilire delle relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo si son rimpiazzati questi ultimi mediante gli archi intercetti fra i loro lati e descritti dai vertici come centri, indi a sua volta si è sostituito agli archi di circolo delle linee rette chiamate *linee trigonometriche*, aventi con questi archi delle speciali relazioni. Le linee trigonometriche come dipendenti dall'arco di circolo cui esse si riferiscono prendono anche il nome di *funzioni circolari*.

Avanti di definire le varie linee trigonometriche, è bene far conoscere alcune convenzioni che hanno rapporto coi segni algebrici che vengono attribuiti alle rette ed agli archi.

Sia O (fig. 264) il centro di un circolo e sia sulla circonferenza A un punto a piacere che si assume qual origine degli archi. Tirato il diametro AB e l'altro CD ad esso perpendicolare, se si suppone che gli archi contati da A nella direzione $ACBD$ sieno positivi, saranno invece negativi quelli presi in senso opposto. E così, ad esempio, l'arco AM avrà il segno $+$ ed AM''' il segno $-$.

Quanto alle linee rette si conteranno come positive quelle che si distendono sulla OA a destra di O e sopra CD da O verso C . Negative invece saran le rette valutate a sinistra di O verso B e al disotto verso D .

Scelto una volta per sempre il raggio eguale all'unità ed essendo AM un arco qualsiasi a si chiama:

Seno la perpendicolare MP abbassata dall'estremo M dell'arco sul raggio passante per l'altro estremo. Si indica questa retta con *sen. a*.

Tangente la porzione AT della tangente al circolo compresa fra l'estremo A e il prolungamento del raggio OM che passa per l'altro estremo. Si indica col simbolo *tang. a*.

Secante la porzione OS del diametro prolungato passante per un estremo compreso fra il centro O e la tangente MS alla curva tirata per l'altro estremo. Si indica con *sec. a*.

Seno-verso è la retta PA compresa fra l'origine degli archi e il piede del seno. Si indica col simbolo *sen. v. a*.

Il seno, tangente, secante e seno-verso dell'arco complementare MC che nella figura son rispettivamente rappresentati da MQ , CG , OV , QC prendono i nomi speciali di *coseno*, *cotangente*, *cosecante* e *coseno-verso* rapporto all'arco primitivo. Si indicano coi simboli *cos. a*, *cot. a*, *cosec. a*, *cos. v. a*.

Il seno-verso ed il coseno-verso sono però due linee non usitate nella trigonometria elementare.

Le linee trigonometriche di un arco hanno fra loro diverse relazioni che possono facilmente dedursi dall'ispezione della figura.

Nel triangolo rettangolo OMP , si ha:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2$$

ed osservando che $OP = QM = \cos. a$, se si sostituisce ad ogni retta il suo valore simbolico, otterremo:

$$\text{sen.}^2 a + \text{cos.}^2 a = 1 \dots\dots\dots (1).$$

I triangoli simili OPM , OTA danno la proporzione:

$$OP : PM :: OA : AT$$

ovvero: $\cos. a : \sin. a :: 1 : \tan. a$

da cui: $\tan. a = \frac{\sin. a}{\cos. a} \dots\dots\dots (2).$

Gli altri triangoli pure simili OPM , OMS danno:

$$OP : OM :: OM : OS$$

ovvero: $\cos. a : 1 :: 1 : \sec. a$

donde: $\sec. a = \frac{1}{\cos. a} \dots\dots\dots (3).$

I triangoli OQM , OCG daranno:

$$OQ : QM :: OC : CG$$

ossia: $\sin. a : \cos. a :: 1 : \cot. a$

da cui: $\cot. a = \frac{\cos. a}{\sin. a} \dots\dots\dots (4).$

I triangoli OQM , OTV danno:

$$OQ : OM :: OC : OV$$

ovvero: $\sin. a : 1 :: 1 : \operatorname{cosec}. a$

e quindi: $\operatorname{cosec}. a = \frac{1}{\sin. a} \dots\dots\dots (5).$

Il triangolo rettangolo OSM dà:

$$\overline{OS}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{SM}^2$$

ed osservando che $SM = AT = \tan. a$:

$$\sec.^2 a = 1 + \tan.^2 a \dots\dots\dots (6).$$

Il triangolo pure rettangolo OMV dà:

$$\overline{OV}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{VM}^2$$

e perciò in simil guisa: ¹

$$\operatorname{cosec}.^2 a = 1 + \cot.^2 a \dots\dots\dots (7).$$

Infine moltiplicando fra loro membro a membro la (2) e la (4) si ottiene:

$$\text{tang. } a \cot. a = 1$$

e perciò:

$$\cot. a = \frac{1}{\text{tang. } a}, \text{ tang. } a = \frac{1}{\cot. a} \dots \dots \dots (8).$$

Le otto formule che abbiamo date servono a determinare cinque delle linee trigonometriche quando la sesta è cognita. Si conosca, per esempio, il seno e sia $\text{sen. } a = m$. Dall'equazione (1) si avrà:

$$\cos. a = \sqrt{1 - m^2}$$

indi dalla (2): $\text{tang. } a = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}.$

La (3) ci dà: $\sec. a = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}.$

La (4): $\cot. a = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m}.$

Infine la (5): $\text{cosec. } a = \frac{1}{m}.$

È bene far notare che quando è cognita una linea trigonometrica si può graficamente fissare l'arco a cui corrisponde. Conosciuta per fissare le idee, la tangente ed essendo A l'estremo dell'arco a determinarsi si condurrà in quel punto la tangente AT al cerchio eguale in lunghezza a quella data, indi si tirerà il raggio OT che taglierà in M la circonferenza. OM sarà l'arco in quistione.

E così rimane evidente che quando si conosceranno le relazioni che passano fra un arco e le sue linee trigonometriche, l'arco dovrà potersi determinare analiticamente, come graficamente, talchè in definitiva queste linee potran rimpiazzare gli archi in tutte le quistioni, quando si adoperino convenientemente.

Esaminiamo ora come varino le linee trigonometriche di un arco al variare dell'arco stesso.

SENO. All'origine degli archi, cioè coll'arco zero, il seno è anch'esso evidentemente nullo. Crescendo l'arco da 0° a 90° il seno cresce positivamente fino a diventare eguale a $+1$. Da 90° a 180° il seno decresce per ritornare nullo. Da 180° in là il seno divien negativo e diminuisce fino a -1 nell'arco di 270° . Ritorna a crescere mantenendosi sempre negativo nel quarto quadrante per ritornar nullo coll'arco di 360° .

Queste verità sono mostrate evidenti dalla semplice ispezione della figura.

È chiaro inoltre che quando l'arco sorpassa l'intera circonferenza i seni e in generale tutte le linee trigonometriche debbon ritornare a prendere periodicamente i medesimi valori. Talchè:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (2k\pi + \alpha) &= \text{sen. } \alpha, \\ \text{cos. } (2k\pi + \alpha) &= \text{cos. } \alpha, \text{ ec.} \end{aligned}$$

essendo k un numero intiero qualunque e 2π la circonferenza di raggio 1.

TANGENTE. Per l'arco zero la tangente è evidentemente nulla. Essa cresce col medesimo in senso positivo fino a divenire infinita per l'arco di 90° , giacchè in quel caso è parallela al raggio che passa per l'altro estremo dell'arco. Nel secondo quadrante la tangente è negativa e varia da $-\infty$ allo zero valore che prende per l'arco di 180° . Nel terzo quadrante riprende le variazioni subite nel primo, e nel quarto quelle del secondo.

SECANTE. Per l'arco nullo la secante è eguale all'unità positiva. Essa cresce col crescer dell'arco fino a diventare infinita coll'arco di 90° . Nel secondo quadrante è sempre negativa variando dall'infinito negativo a -1 ; nel terzo ritorna a decrescere da -1 a $-\infty$ e nel quarto ritornando positiva varia dall'infinito all'unità.

COSENO. Il coseno potendo considerarsi come la porzione di raggio che sta fra il centro e il piede del seno, sarà

eguale a $+1$ per l'arco 0° , diminuirà nel primo quadrante fino a divenir nullo nell'arco di 90° , prenderà il segno $-$ fra 90° e 180° , diventando -1 per quest'ultimo arco. Fra 180° e 270° il coseno è sempre negativo e cresce da -1 allo zero. Infine nel quarto quadrante ritornando positivo cresce di bel nuovo da zero a $+1$.

COTANGENTE e COSECANTE. Onde scorgere con chiarezza le variazioni della cotangente e cosecante basta far capo alle formule:

$$\text{cot. } a = \frac{1}{\text{tang. } a}, \quad \text{cosec. } a = \frac{1}{\text{sen. } a}.$$

Da queste si desume che la cotangente ha gli stessi segni della tangente e la cosecante quelli del seno; che la prima linea è nulla per la tangente infinita e reciprocamente, mentre invece la cosecante eguaglia l'unità insieme col seno e diviene infinita pel valore nullo di quest'ultimo.

E perciò:

$$\text{per l'arco } 0^\circ \text{ cot. } 0^\circ = \infty, \text{ cosec. } 0^\circ = \infty.$$

Nel primo quadrante le cotangenti son positive e divengono nulle a 90° .

Nel secondo quadrante son negative e divengono infinite a 180° . Nel terzo ritornan positive e divengono zero a 270° . Infine ritornano negative nel quarto quadrante per divenir infinite a 360° .

Le cosecanti son positive nei primi due quadranti e negative negli altri due. Per 90° hanno il valore $+1$, per 180° sono infinite, per 270° , -1 e ritornano infinite a 360° .

Dalle considerazioni generali che abbiamo esposte ne consegue che i seni e i coseni variano da $+1$ a -1 ; le secanti e cosecanti da $+1$ a $+\infty$ e -1 a $-\infty$, mentre invece le tangenti e cotangenti acquistano tutti i valori possibili. E da qui ne emerge il vantaggio capitale che si ha col determinare un arco mediante la sua tangente a preferenza di qualunque altra linea trigonometrica, giacchè in tal guisa le sue variazioni molto sensibili determinano quest'arco con la massima precisione.

Il quadro che segue riassume i segni delle diverse linee trigonometriche nei singoli quadranti e può esser comodo a consultarsi da chi si inizia allo studio della trigonometria.

QUADRANTI	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE	SECANTE	COSECANTE
Primo.....	+	+	+	+	+	+
Secondo.....	+	—	—	—	—	+
Terzo	—	—	+	+	—	—
Quarto.....	—	+	—	—	+	—

Vediamo ora come dato un arco qualsiasi superiore a 90° si possa ridurre la determinazione delle sue linee trigonometriche a quelle di un arco inferiore a 90° . Per questo dimostreremo alcuni teoremi preparatori.

Due archi supplementari hanno il medesimo seno, e coseni eguali, ma di segno diverso.

Sieno AM , AMM' i dati archi. I loro seni MP , $M'P'$ sono eguali. I coseni OP , OP' lo sono pure, ma hanno segno diverso.

Osservando ora che se si pone $AM = a$, $AMM' = 180^\circ - a$, otterremo:

$$\text{tang. } (180^\circ - a) = \frac{\text{sen. } (180^\circ - a)}{\text{cos. } (180^\circ - a)} = \frac{\text{sen. } a}{-\text{cos. } a} = -\text{tang. } a.$$

Quindi :

Due archi supplementari hanno tangenti eguali, ma di segno diverso.

Eguualmente:

$$\cot. (180^\circ - a) = \frac{1}{\tan. (180^\circ - a)} = - \frac{1}{\tan. a} = - \cot. a,$$

$$\sec. (180^\circ - a) = \frac{1}{\cos. (180^\circ - a)} = - \frac{1}{\cos. a} = - \sec. a,$$

$$\operatorname{cosec}. (180^\circ - a) = \frac{1}{\sin. (180^\circ - a)} = \frac{1}{\sin. a} = \operatorname{cosec}. a,$$

Perciò:

Due archi supplementari hanno secanti e cotangenti dello stesso valore, ma di diverso segno e cosecanti eguali.

Da quest'insieme di teoremi ne viene che le linee trigonometriche degli archi compresi fra 90° e 180° si riducono a quelle degli archi del primo quadrante.

Sia ora un arco $AMM'M'' = 180^\circ + a$. Tirato il raggio OM'' e prolungatolo fino in M ne verrà che $AM = a$. Quindi l'esposizione della figura mostra che:

$$\begin{aligned}\sin. (180^\circ + a) &= - \sin. a, \\ \cos. (180^\circ + a) &= - \cos. a, \\ \tan. (180^\circ + a) &= \tan. a.\end{aligned}$$

E perciò:

$$\sec. (180^\circ + a) = \frac{1}{\cos. (180^\circ + a)} = - \frac{1}{\cos. a} = - \sec. a,$$

$$\cot. (180^\circ + a) = \frac{1}{\tan. (180^\circ + a)} = \frac{1}{\tan. a} = \cot. a,$$

$$\operatorname{cosec}. (180^\circ + a) = \frac{1}{\sin. (180^\circ + a)} = - \frac{1}{\sin. a} = - \operatorname{cosec}. a.$$

Prendasi infine un arco $AMM'M''M'''$ compreso fra 270° e 360° e perciò rappresentato da $360^\circ - a$. Avremo dietro l'ispezione della figura:

$$\begin{aligned}\sin. (360^\circ - a) &= - \sin. a, \\ \cos. (360^\circ - a) &= \cos. a, \\ \tan. (360^\circ - a) &= - \tan. a.\end{aligned}$$

E ricorrendo quindi alle formule:

$$\cot. (360^\circ - a) = \frac{1}{\tan. (360^\circ - a)} = - \frac{1}{\tan. a} = - \cot. a,$$

$$\sec. (360^\circ - a) = \frac{1}{\cos. (360^\circ - a)} = \frac{1}{\cos. a} = \sec. a,$$

$$\operatorname{cosec}. (360^\circ - a) = \frac{1}{\sin. (360^\circ - a)} = - \frac{1}{\sin. a} = - \operatorname{cosec}. a.$$

E così qualunque sia l'arco dato si può ridurre la ricerca delle sue linee a quella di un arco inferiore ai 90° .

Per chiudere queste ricerche determineremo ora le relazioni che passano fra le linee trigonometriche di due archi eguali in lunghezza, ma uno positivo e l'altro negativo.

Siano AM , AM''' i due archi. Avremo dietro l'esame della fig.

$$\sin. (-a) = - \sin. a,$$

$$\cos. (-a) = \cos. a,$$

$$\tan. (-a) = - \tan. a.$$

E in forza delle formule:

$$\cot. (-a) = \frac{1}{\tan. (-a)} = - \frac{1}{\tan. a} = - \cot. a,$$

$$\sec. (-a) = \frac{1}{\cos. (-a)} = \frac{1}{\cos. a} = \sec. a,$$

$$\operatorname{cosec}. (-a) = \frac{1}{\sin. (-a)} = - \frac{1}{\sin. a} = - \operatorname{cosec}. a.$$

§ 2.

Il seno di un arco è eguale alla metà della corda dell'arco doppio. Espressioni delle linee trigonometriche degli archi di 18° , 30° , 45° e 60° in funzione del raggio.

Il seno di un arco eguaglia la metà della corda dell'arco doppio (fig. 265).

Sia AM l'arco (fig. 265), MP il suo seno. Prolungato MP fino a incontrare la circonferenza in M' , si ha per un noto teorema di geometria che:

$$MP = M'P, \text{ arco } AM = \text{arco } AM'.$$

Rimane quindi comprovato il nostro asserto.

Da ciò ne viene la facilità di calcolare le linee trigonometriche di certi archi speciali, applicando le teorie cognite sui poligoni regolari inscritti nel circolo.

Arco di 18.° Il seno di 18.° è la metà della corda dell'arco di 36.°, o in altri termini la metà del lato del decagono regolare inscritto nel circolo. E siccome questo lato nel circolo di raggio 1 è (vedi Geom. Piana, § 53):

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

così avremo: $\text{sen. } 18.^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

Quindi:

$$\text{cos. } 18.^\circ = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 18.^\circ} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}}$$

ossia: $\text{cos. } 18.^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$

$$\text{tang. } 18.^\circ = \frac{\text{sen. } 18.^\circ}{\text{cos. } 18.^\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

$$\text{cot. } 18.^\circ = \frac{1}{\text{tang. } 18.^\circ} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$$

$$\text{sec. } 18.^\circ = \frac{1}{\text{cos. } 18.^\circ} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\text{cosec. } 18.^\circ = \frac{1}{\text{sen. } 18.^\circ} = \frac{4}{\sqrt{5}-1}.$$

Arco di 30.° Il seno di 30.° essendo la metà della corda di 60.° o in altri termini del lato dell'esagono risulta eguale a $\frac{1}{2}$. Avremo perciò:

$$\text{cos. } 30.^\circ = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 30.^\circ} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tang. } 30.^{\circ} = \frac{\text{sen. } 30.^{\circ}}{\text{cos. } 30.^{\circ}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{cot. } 30.^{\circ} = \frac{1}{\text{tang. } 30.^{\circ}} = \sqrt{3},$$

$$\text{sec. } 30.^{\circ} = \frac{1}{\text{cos. } 30.^{\circ}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\text{cosec. } 30.^{\circ} = \frac{1}{\text{sen. } 30.^{\circ}} = 2.$$

Arco di 45.° Il seno di 45.° sarà la metà della corda dell'arco di 90.°, o in altri termini la metà del lato del quadrato inscritto. E perciò:

$$\text{sen. } 45.^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{cos. } 45.^{\circ} = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 45.^{\circ}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{tang. } 45 = \frac{\text{sen. } 45.^{\circ}}{\text{cos. } 45.^{\circ}} = 1.$$

Questo risultato mostra che la tangente dell'arco di 45.° eguaglia il raggio. Esso è importante a ritenersi:

$$\text{cot. } 45.^{\circ} = \frac{1}{\text{tang. } 45.^{\circ}} = 1,$$

$$\text{sec. } 45.^{\circ} = \frac{1}{\text{cos. } 45.^{\circ}} = \sqrt{2},$$

$$\text{cosec. } 45.^{\circ} = \frac{1}{\text{sen. } 45.^{\circ}} = \sqrt{2}$$

Arco di 60.° Il seno di 60.° è la metà della corda di 120.° e perciò del lato del triangolo equilatero inscritto. Si ha dunque:

$$\text{sen. } 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos. 60^\circ = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 60^\circ} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{tang. } 60^\circ = \frac{\text{sen. } 60^\circ}{\cos. 60^\circ} = \sqrt{3},$$

$$\cot. 60^\circ = \frac{1}{\text{tang. } 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sec. 60^\circ = \frac{1}{\cos. 60^\circ} = 2,$$

$$\text{cosec. } 60^\circ = \frac{1}{\text{sen. } 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§ 3.

Espressione del seno e del coseno della somma e della differenza di due archi in funzione del seno e del coseno di questi archi. Formule che danno il seno ed il coseno del doppio e quelli della metà di un arco mediante il seno e coseno di questo. Formule che danno la tangente della somma e quella della differenza di due archi mediante la tangente di questi. Formule che danno la tangente del doppio e quelle della metà di un arco mediante la tangente di questo. Altre espressioni della tangente della metà di un arco.

Cominciamo a considerare il caso in cui si abbiano due archi positivi, minori di 90° , tali che la loro somma sia anche minore di 90° e di cui son dati i seni e coseni e proponiamoci di determinare in funzione di queste linee il seno e coseno della somma e differenza di detti archi.

Sieno adunque $AM = a$, $MN = b$ gli archi dati. Presa la lunghezza LM sulla circonferenza eguale all'arco b , avremo $AN = a + b$, $AL = a - b$. Si tiri il raggio OM , la corda NL , le perpendicolari MP , LC , ND , EF alla OA , e le parallele LR , EV alla medesima. Si avrà dapprima:

$$\begin{aligned} MP &= \text{sen. } a, \quad OP = \cos. a, \\ NE &= \text{sen. } b, \quad OE = \cos. b, \\ ND &= \text{sen. } (a + b), \quad OD = \cos. (a + b), \\ LC &= \text{sen. } (a - b), \quad OC = \cos. (a - b). \end{aligned}$$

Ciò posto osserveremo che i triangoli rettangoli EVN , ERL sono eguali per avere le ipotenuse e gli angoli eguali, quindi $EV = RL$, $NV = ER$.

Ora l'ispezione della figura ci da:

$$\text{sen. } (a + b) = ND = NV + VD = NV + EF$$

$$\text{sen. } (a - b) = LC = EF - ER = EF - NV$$

$$\text{cos. } (a + b) = OD = OF - FD = OF - VE$$

$$\text{cos. } (a - b) = OC = OF + FC = OF + VE.$$

La quistione è così ridotta a determinare le quattro linee NV , EF , OF , VE . A ciò servono prima i triangoli simili OFE , OMP che danno le proporzioni:

$$OF : OE :: OP : OM$$

$$FE : OE :: MP : OM$$

ovvero:

$$OF : \text{cos. } b :: \text{cos. } a : 1$$

$$FE : \text{cos. } b :: \text{sen. } a : 1$$

da cui:

$$OF = \text{cos. } a \text{ cos. } b, FE = \text{sen. } a \text{ cos. } b.$$

Servono anche i triangoli OMP , VNE che essendo simili per avere i lati rispettivamente perpendicolari danno le altre proporzioni:

$$VN : NE :: OP : OM$$

$$VE : NE :: MP : OM$$

ovvero:

$$VN : \text{sen. } b :: \text{cos. } a : 1$$

$$VE : \text{sen. } b :: \text{sen. } a : 1$$

da cui:

$$VN = \text{sen. } b \text{ cos. } a, VE = \text{sen. } a \text{ sen. } b.$$

Sostituendo adesso questi valori otterremo le quattro formule richieste, cioè:

$$\text{sen. } (a + b) = \text{sen. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } b \text{ cos. } a. \dots (1)$$

$$\text{sen. } (a - b) = \text{sen. } a \text{ cos. } b - \text{sen. } b \text{ cos. } a. \dots (2)$$

$$\text{cos. } (a + b) = \text{cos. } a \text{ cos. } b - \text{sen. } a \text{ sen. } b. \dots (3)$$

$$\text{cos. } (a - b) = \text{cos. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } a \text{ sen. } b. \dots (4)$$

che possono anche compendiarsi in due:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (a \pm b) &= \text{sen. } a \cos. b \pm \text{sen. } b \cos. a \\ \cos. (a \pm b) &= \cos. a \cos. b \mp \text{sen. } a \text{sen. } b \end{aligned}$$

ove i segni superiori e gli inferiori dei due membri corrispondono rispettivamente.

Andremo ora a provare che le 4 formule sopra trovate son vere qualunque sieno gli archi e per non ripetere troppi calcoli ci limiteremo a considerare la (1) e la (3) giacchè per le altre due il ragionamento sarebbe identico. Divideremo la dimostrazione in tre casi.

Caso 1.° Gli archi a e b essendo numeri di 90° , sommati insieme superano 90° .

Siano allora a' , b' i loro complementi, avremo:

$$a + a' = 90^\circ, b + b' = 90^\circ$$

donde:

$$a' = 90^\circ - a, b' = 90^\circ - b.$$

Se: $a + b > 90^\circ$ sarà $a' + b' < 90^\circ$

e perciò per gli archi a' , b' le formule saranno vere e così:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (a' + b') &= \text{sen. } a' \cos. b' + \text{sen. } b' \cos. a' \\ \cos. (a' + b') &= \cos. a' \cos. b' - \text{sen. } a' \text{sen. } b'. \end{aligned}$$

Sostituendo ad a' , b' i loro valori in funzione di a e b , si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (180^\circ - a - b) &= \text{sen. } (90^\circ - a) \cos. (90^\circ - b) \\ &\quad + \text{sen. } (90^\circ - b) \cos. (90^\circ - a) \\ \cos. (180^\circ - a - b) &= \cos. (90^\circ - a) \cos. (90^\circ - b) \\ &\quad - \text{sen. } (90^\circ - a) \text{sen. } (90^\circ - b). \end{aligned}$$

Ricordando ciò che ha rapporto ai seni e coseni degli archi complementari e supplementari si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (a + b) &= \cos. a \text{sen. } b + \cos. b \text{sen. } a \\ - \cos. (a + b) &= + \text{sen. } a \text{sen. } b - \cos. a \cos. b \end{aligned}$$

che non sono altro che quelle già date sotto forma ben poco diversa.

CASO 2.° Gli archi a, b son compresi fra 90° e 180° Talchè:

$$a = 90^\circ + a', b = 90^\circ + b'$$

ove naturalmente a' e b' son inferiori a 90° Vuol dire che per questi archi le formule son vere e si ha:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (a' + b') &= \text{sen. } a' \cos. b' + \text{sen. } b' \cos. a' \\ \cos. (a' + b') &= \cos. a' \cos. b' - \text{sen. } a' \text{sen. } b'. \end{aligned}$$

Ma: $a' = a - 90^\circ, b' = b - 90^\circ$

quindi sostituendo risulta:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (a + b - 180^\circ) &= \text{sen. } (a - 90^\circ) \cos. (b - 90^\circ) \\ &+ \text{sen. } (b - 90^\circ) \cos. (a - 90^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos. (a + b - 180^\circ) &= \cos. (a - 90^\circ) \cos. (b - 90^\circ) \\ &- \text{sen. } (a - 90^\circ) \text{sen. } (b - 90^\circ). \end{aligned}$$

Ricordando che due archi eguali ma di segno diverso hanno lo stesso coseno e seni eguali, ma di segno contrario queste formule possono cambiarsi in

$$\begin{aligned} - \text{sen. } (180^\circ - a - b) &= - \text{sen. } (90^\circ - a) \cos. (90^\circ - b) \\ &- \text{sen. } (90^\circ - b) \cos. (90^\circ - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos. (180^\circ - a - b) &= \cos. (90^\circ - a) \cos. (90^\circ - b) \\ &- \text{sen. } (90^\circ - a) \text{sen. } (90^\circ - b). \end{aligned}$$

E applicando ancora ciò che ha rapporto ai seni e coseni degli archi supplementari e complementari, viene con opportuno cambiamento di segno:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (a + b) &= \cos. a \text{sen. } b + \cos. b \text{sen. } a \\ \cos. (a + b) &= \cos. a \cos. b - \text{sen. } a \text{sen. } b \end{aligned}$$

come volevasi provare.

Quando i due archi a e b superano i 180° , la loro somma è superiore ai 360° e quindi si rientra nel caso degli archi semplici.

CASO 3.° Gli archi a e b son negativi. Si ponga:

$$a = -a', b = -b'$$

talchè a' e b' sien positivi. Per questi ultimi archi le formule essendo vere, noi avremo:

$$\begin{aligned}\text{sen. } (a' + b') &= \text{sen. } a' \cos. b' + \text{sen. } b' \cos. a' \\ \cos. (a' + b') &= \cos. a' \cos. b' - \text{sen. } a' \text{sen. } b'\end{aligned}$$

ove sostituendo ad a' , b' i loro valori in funzione di a e b , si ottiene:

$$\begin{aligned}\text{sen. } (-a - b) &= \text{sen. } (-a) \cos. (-b) + \text{sen. } (-b) \cos. (-a) \\ \cos. (-a - b) &= \cos. (-a) \cos. (-b) - \text{sen. } (-a) \text{sen. } (-b).\end{aligned}$$

Applicando le cognite regole che si riferiscono ai seni e coseni degli archi negativi, queste formule si cambiano nelle altre:

$$\begin{aligned}-\text{sen. } (a + b) &= -\text{sen. } a \cos. b - \text{sen. } b \cos. a \\ \cos. (a + b) &= \cos. a \cos. b - \text{sen. } a \text{sen. } b.\end{aligned}$$

Cambiando di segno la prima equazione, si ottiene ciò che si voleva dimostrare.

E così le formule per ottenere il seno e coseno della somma o differenza di due archi in funzione dei seni e coseni di questi archi rimangono stabilite nel modo il più generale.

Se nelle formule (1) e (3) si pone $b = a$ esse divengono, dopo le effettuabili riduzioni:

$$\begin{aligned}\text{sen. } 2a &= 2 \text{sen. } a \cos. a \\ \cos. 2a &= \cos.^2 a - \text{sen.}^2 a\end{aligned}$$

Esse somministrano il seno e coseno dell'arco doppio in funzione dei seni e coseni dell'arco semplice. Volendo invece avere quei valori espressi mediante una sola linea trigonometrica, giova riflettere che:

$$\text{sen. } a = \sqrt{1 - \cos.^2 a}, \quad \cos. a = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 a},$$

e perciò sostituendo può aversi a seconda dei casi.

$$\begin{aligned}\text{sen. } 2a &= 2 \text{sen. } a \sqrt{1 - \text{sen.}^2 a} = 2 \cos. a \sqrt{1 - \cos.^2 a} \\ \cos. 2a &= 2 \cos.^2 a - 1 \dots (5) \\ \cos. 2a &= 1 - 2 \text{sen.}^2 a \dots (6).\end{aligned}$$

Se ora nelle formule (5) e (6) si cambia $2a$ in a e perciò a in $\frac{1}{2}a$ esse diventano:

$$\cos. a = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} a - 1$$

$$\cos. a = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a,$$

da cui risolvendo rapporto a $\sin. \frac{1}{2} a$ e $\cos. \frac{1}{2} a$, ne viene:

$$(7) \dots \sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos. a}{2}}, \cos. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos. a}{2}}.$$

Queste formule somministrano il seno e coseno dell'arco metà in funzione del coseno dell'arco semplice. Ove gli anzidetti valori si volessero avere espressi mediante il seno si potrebbe al posto di $\cos. a$ sostituire $\sqrt{1 - \sin.^2 a}$, ma gioverà invece operare in modo un poco diverso. Osservato che:

$$\sin.^2 \frac{1}{2} a + \cos.^2 \frac{1}{2} a = 1,$$

$$e: \quad 2 \sin. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} a = \sin. a,$$

si sommino una volta e si sottraggano quindi queste due eguaglianze membro a membro; avremo.

$$\left(\sin. \frac{1}{2} a + \cos. \frac{1}{2} a \right)^2 = 1 + \sin. a,$$

$$\left(\sin. \frac{1}{2} a - \cos. \frac{1}{2} a \right)^2 = 1 - \sin. a,$$

donde estraendo radice:

$$\sin. \frac{1}{2} a + \cos. \frac{1}{2} a = \sqrt{1 + \sin. a},$$

$$\sin. \frac{1}{2} a - \cos. \frac{1}{2} a = \sqrt{1 - \sin. a},$$

e quindi:

$$\text{sen. } \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{1 + \text{sen. } a} + \sqrt{1 - \text{sen. } a}}{2},$$

$$\text{cos. } \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{1 + \text{sen. } a} - \sqrt{1 - \text{sen. } a}}{2}.$$

Volendo ora ottenere la tangente della somma o della differenza di due archi ricordando che:

$$\text{tang. } (a + b) = \frac{\text{sen. } (a + b)}{\text{cos. } (a + b)},$$

se si sostituiscono al seno e coseno i valori cognitivi si avrà:

$$\text{tang. } (a + b) = \frac{\text{sen. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } b \text{ cos. } a}{\text{cos. } a \text{ cos. } b - \text{sen. } a \text{ sen. } b},$$

e dividendo i due termini della frazione per $\text{cos. } a \text{ cos. } b$, e riducendo:

$$\text{tang. } (a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}.$$

Un processo simile darebbe:

$$\text{tang. } (a - b) = \frac{\text{tang. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{tang. } a \text{ tang. } b}.$$

Se nel valore di $\text{tang. } (a + b)$ si pone $b = a$, ne viene:

$$\text{tang. } 2a = \frac{2 \text{ tang. } a}{1 - \text{tang.}^2 a},$$

formula che dà la tangente dell'arco doppio in funzione di quella dell'arco semplice.

Volendo risolvere il problema inverso si libererà dai denominatori e otterremo:

$$\text{tang. } 2a (1 - \text{tang.}^2 a) = 2 \text{ tang. } a.$$

Cambiando ora $2a$ in a e perciò a in $\frac{1}{2}a$ e sviluppando si ha:

$$\text{tang. } a - \text{tang. } a \text{ tang.}^2 \frac{1}{2} a = 2 \text{ tang. } \frac{1}{2} a,$$

oppure:
$$\text{tang.}^2 \frac{1}{2} a + 2 \frac{\text{tang.} \frac{1}{2} a}{\text{tang.} a} - 1 = 0,$$

donde:
$$\text{tang.} \frac{1}{2} a = -\frac{1}{\text{tang.} a} \pm \sqrt{\frac{1}{\text{tang.}^2 a} + 1},$$

risultato che dà la tangente dell' arco metà quando si conosce quella dell' arco semplice.

Si possono ottenere altre espressioni più semplici di questa tangente in funzione però del seno o del coseno. Dividendo difatto un per l' altro i valori di $\text{sen.} \frac{1}{2} a$ e $\text{cos.} \frac{1}{2} a$ espressi dalle formule (7) viene:

$$\text{tang.} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \text{cos.} a}{1 + \text{cos.} a}}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore del secondo membro per $1 - \text{cos.} a$ risulta:

$$\text{tang.} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{(1 - \text{cos.} a)^2}{1 - \text{cos.}^2 a}} = \frac{1 - \text{cos.} a}{\text{sen.} a}$$

e viceversa moltiplicando invece per $1 + \text{cos.} a$, si ha:

$$\text{tang.} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \text{cos.}^2 a}{(1 + \text{cos.} a)^2}} = \frac{\text{sen.} a}{1 + \text{cos.} a}.$$

Secondo i casi si adoperano in pratica l' una o l' altra delle espressioni trovate.

§ 4.

Formule che servono per trasformare in alcuni casi la somma o la differenza di due linee trigonometriche in un prodotto. La somma dei seni di due archi sta alla loro differenza come la tangente della semi-somma degli stessi archi sta alla tangente della loro semi differenza.

Noi abbiamo altra volta trovato:

$$\begin{aligned} \text{sen.} (a + b) &= \text{sen.} a \text{ cos.} b + \text{sen.} b \text{ cos.} a, \\ \text{sen.} (a - b) &= \text{sen.} a \text{ cos.} b - \text{sen.} b \text{ cos.} a, \\ \text{cos.} (a + b) &= \text{cos.} a \text{ cos.} b - \text{sen.} a \text{ sen.} b, \\ \text{cos.} (a - b) &= \text{cos.} a \text{ cos.} b + \text{sen.} a \text{ sen.} b. \end{aligned}$$

Sommando le prime due eguaglianze si ottiene:

$$\text{sen. } (a + b) + \text{sen. } (a - b) = 2 \text{ sen. } a \cos. b.$$

Sottraendole invece:

$$\text{sen. } (a + b) - \text{sen. } (a - b) = 2 \text{ sen. } b \cos. a.$$

Sommando la terza e quarta viene:

$$\cos. (a + b) + \cos. (a - b) = 2 \cos. a \cos. b.$$

Sottraendole:

$$\cos. (a - b) - \cos. (a + b) = 2 \text{ sen. } a \text{ sen. } b.$$

Se ora si pone: $a + b = p$, $a - b = q$,

$$\text{donde: } a = \frac{1}{2} (p + q), \quad b = \frac{1}{2} (p - q),$$

queste formule colla sostituzione diventano:

$$\text{sen. } p + \text{sen. } q = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2} (p + q) \cos. \frac{1}{2} (p - q),$$

$$\text{sen. } p - \text{sen. } q = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2} (p - q) \cos. \frac{1}{2} (p + q),$$

$$\cos. p + \cos. q = 2 \cos. \frac{1}{2} (p + q) \cos. \frac{1}{2} (p - q),$$

$$\cos. q - \cos. p = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2} (p + q) \text{ sen. } \frac{1}{2} (p - q).$$

Esse servono a trasformare la somma o la differenza di due seni o coseni in un prodotto.

Per trasformare in simil guisa la somma di due tangenti, si osserverà che:

$$\text{tang. } a + \text{tang. } b = \frac{\text{sen. } a}{\cos. a} + \frac{\text{sen. } b}{\cos. b} =$$

$$\frac{\text{sen. } a \cos. b + \text{sen. } b \cos. a}{\cos. a \cos. b} = \frac{\text{sen. } (a + b)}{\cos. a \cos. b}.$$

Un simil processo darebbe:

$$\text{tang. } (a - b) = \frac{\text{sen. } (a - b)}{\cos. a \cos. b}.$$

Eguualmente:

$$\begin{aligned} \cot. a + \cot. b &= \frac{\cos. a}{\text{sen. } a} + \frac{\cos. b}{\text{sen. } b} = \\ &= \frac{\cos. a \text{ sen. } b + \text{sen. } a \cos. b}{\text{sen. } a \text{ sen. } b} = \frac{\text{sen. } (a + b)}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}. \end{aligned}$$

$$\cot. a - \cot. b = \frac{\text{sen. } (a - b)}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}.$$

Si ha pure:

$$\sec. a + \sec. b = \frac{1}{\cos. a} + \frac{1}{\cos. b} = \frac{\cos. a + \cos. b}{\cos. a \cos. b}.$$

e giovandosi delle formule trovate per i seni e coseni:

$$\sec. a + \sec. b = \frac{2 \cos. \frac{1}{2} (a + b) \cos. \frac{1}{2} (a - b)}{\cos. a \cos. b}.$$

Si troverebbe in simil guisa:

$$\sec. a - \sec. b = \frac{2 \text{sen. } \frac{1}{2} (a + b) \text{sen. } \frac{1}{2} (a - b)}{\cos. a \cos. b}.$$

Avremo anche:

$$\text{cosec. } a + \text{cosec. } b = \frac{1}{\text{sen. } a} + \frac{1}{\text{sen. } b} = \frac{\text{sen. } a + \text{sen. } b}{\text{sen. } a \text{ sen. } b},$$

ed applicando la formula che trasforma la somma di due seni:

$$\text{cosec. } a + \text{cosec. } b = \frac{2 \text{sen. } \frac{1}{2} (a + b) \cos. \frac{1}{2} (a - b)}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}.$$

In simil guisa troveremmo:

$$\text{cosec. } a - \text{cosec. } b = \frac{2 \text{sen. } \frac{1}{2} (a - b) \cos. \frac{1}{2} (a + b)}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}.$$

Dividendo ora l'una per l'altra le eguaglianze (1) e (2) si ottiene:

$$\frac{\text{sen. } p + \text{sen. } q}{\text{sen. } p - \text{sen. } q} = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q)}{\cos. \frac{1}{2}(p+q) \text{sen. } \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(p+q)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(p-q)}.$$

Lo che prova:

Che la somma di due seni sta alla loro differenza come la tangente della semi-somma degli archi sta alla tangente della semi-differenza.

§ 5.

Il seno di un arco è minore della lunghezza dell'arco. La tangente di un arco minore di 90° è maggiore della lunghezza dell'arco. Il rapporto della tangente al seno di un arco e per conseguenza quello della tangente alla lunghezza dell'arco tendono a divenire eguali all'unità quando l'arco diminuisce indefinitamente, quindi risulta un modo di avere valori approssimati delle linee trigonometriche di un arco piccolo. Cenno sopra un modo di calcolare tavole di linee trigonometriche.

Lo scopo di questo tema è quello di indicare come si possa calcolare una tavola che dia le linee trigonometriche dei singoli archi quando sono espressi in gradi. Ma a raggiungere l'intento è d'uopo premettere alcune proposizioni preparatorie.

Ogni arco compreso fra 0° e 90° è maggiore del seno e minore della tangente.

Sia $AM = a$ (fig. 267) l'arco dato e sia MP il suo seno. Questo seno è minore dell'obliqua MA al raggio OA . Ma la corda MA è minore dell'arco MA , dunque a maggior ragione $MP < \text{arco } AM$.

Il settore OMA è più piccolo evidentemente del triangolo rettangolo OAM . Ma la misura del settore è $\frac{OA}{2} \times \text{arco } AM$ e quello del triangolo $\frac{OA}{2} \times AT$; ne viene dunque:

$$\frac{OA}{2} \times \text{arco } AM < \frac{OA}{2} \times AT,$$

e semplificando:

$$\text{arco } AM < AT.$$

È dunque provato che:

$$a > \text{sen. } a, \quad a < \text{tang. } a.$$

La differenza fra l'arco ed il suo seno diminuisce allo scemare dell'arco.

Sia l'arco AM minore di AN e siano MP , NQ i rispettivi loro seni. La retta NR essendo minore della corda NM e quindi dell'arco MN potremo stabilire la disuguaglianza:

$$NR < \text{arco } MN,$$

ovvero: $NQ - MP < \text{arco } AN - \text{arco } AM,$

e trasportando:

$$\text{arco } AM - MP < \text{arco } AN - NQ,$$

come volevasi dimostrare.

Se l'arco diminuisce da 90° verso 0° il rapporto $\frac{\text{sen. } a}{a}$ cresce.

Siano a ed $a + h$ due archi; vuolsi provare che:

$$\frac{\text{sen. } a}{a} > \frac{\text{sen. } (a + h)}{a + h}.$$

Trasformiamo questa disuguaglianza onde renderla chiaramente evidente. Liberando dai denominatori e sviluppando $\text{sen. } (a + h)$, diviene:

$$a \text{ sen. } a + h \text{ sen. } a > a \text{ sen. } a \cos. h + a \text{ sen. } h \cos. a.$$

Dividiamo per $\cos. a$ e trasportiamo:

$$a \text{ tang. } a (1 - \cos. h) + h \text{ tang. } a - a \text{ sen. } h > 0.$$

Dividendo ancora per ha si ottiene:

$$\text{tang. } a \frac{(1 - \cos. h)}{h} + \frac{\text{tang. } a}{a} - \frac{\text{sen. } h}{h} > 0.$$

Questo risultato è esatto, perchè $1 - \cos. h$ è positivo, giacchè i coseni son sempre minori dell'unità e perchè

$\frac{\text{tang. } a}{a}$ superando l'unità mentre $\frac{\text{sen. } h}{h}$ ne è al disotto, la differenza fra queste due quantità viene a risultare positiva.

Quando l'arco tende verso lo zero il rapporto del seno all'arco si avvicina verso l'unità.

Per ciò che sappiamo si ha difatto:

$$\frac{1}{\text{sen. } a} > \frac{1}{a} > \frac{1}{\text{tang. } a},$$

e ponendo al posto di $\text{tang. } a$, $\frac{\text{sen. } a}{\cos. a}$:

$$\frac{1}{\text{sen. } a} > \frac{1}{a} > \frac{\cos. a}{\text{sen. } a}.$$

Moltiplicando per $\text{sen. } a$, viene:

$$1 > \frac{\text{sen. } a}{a} > \cos. a.$$

Il rapporto $\frac{\text{sen. } a}{a}$ è perciò compreso fra 1 e $\cos. a$, e converge verso l'unità man mano che l'arco si avvicina a zero. Nel caso del limite avendosi $\lim. \cos. a = 1$, per $a = 0$, si avrà pure:

$$\lim. \frac{\text{sen. } a}{a} = 1.$$

La differenza fra l'arco ed il seno è sempre minore del quarto del cubo dell'arco, purchè l'arco sia minore di 90°.

Sia a l'arco in quistione. Avremo:

$$\text{tang. } \frac{a}{2} > \frac{a}{2},$$

e ponendo per la tangente il suo valore in funzione del seno e del coseno:

$$\frac{\text{sen. } \frac{a}{2}}{\cos. \frac{a}{2}} > \frac{a}{2}.$$

Liberando dai denominatori:

$$2 \operatorname{sen.} \frac{a}{2} a > \cos. \frac{a}{2}.$$

Moltiplicando per $\cos. \frac{a}{2}$:

$$2 \operatorname{sen.} \frac{a}{2} \cos. \frac{a}{2} > a \cos.^2 \frac{a}{2},$$

ed osservando che:

$$\operatorname{sen.} a = 2 \operatorname{sen.} \frac{a}{2} \cos. \frac{a}{2}, \text{ e } \cos.^2 \frac{a}{2} = 1 - \operatorname{sen.}^2 \frac{a}{2},$$

viene: $\operatorname{sen.} a > a - a \operatorname{sen.}^2 \frac{a}{2},$

donde: $a - \operatorname{sen.} a < a \operatorname{sen.}^2 \frac{a}{2}.$

Riflettendo quindi che $\operatorname{sen.} \frac{a}{2} < \frac{a^2}{2}$, e perciò $\operatorname{sen.}^2 \frac{a}{2} < \frac{a^2}{4}$,

ne viene che se nella disuguaglianza di sopra al posto di $\operatorname{sen.}^2 \frac{a}{2}$ si pone $\frac{a^2}{4}$ essa sussisterà a maggior ragione, ed avremo allora:

$$a - \operatorname{sen.} a < \frac{a^3}{4},$$

come volevasi dimostrare.

Quest'ultimo teorema somministra il mezzo di valutare l'errore che si commette allorchè si prende il seno per l'arco o viceversa.

Ciò posto si consideri l'arco piccolissimo di $10''$ pel quale probabilmente si potrà prendere l'arco pel seno senza errore sensibile. Si cominci dal determinare la lunghezza di quest'arco rettificato. Avremo, siccome la circonferenza di raggio 1 è 2π ovvero:

$$6^m, 28318530717958647692, \text{ ec.,}$$

che $10''$ che sono la 129600^{esima} parte della stessa circonferenza verranno rappresentati da:

$$0, 00004848136811095359, \text{ ec.}$$

Ad avere l'errore commesso col prendere l'arco pel seno basta determinare il quarto del cubo dell'arco che approssimativamente per eccesso potrà rappresentarsi con :

$$\frac{(0,00005)^3}{4},$$

e si troverà per questo valore :

$$0,0000000000000032, \text{ ec.,}$$

lo che prova che la differenza non può arrivare ad influire altro che nella 14^a cifra decimale, talchè potrà dirsi essere esattamente:

$$\text{sen. } 10'' = 0,0000484813681.$$

Trovato *sen. 10''* si possono avere tutte le altre linee trigonometriche dell'arco mediante le formule già date nel § 1.

Da questo dato preso come punto di partenza è facile rinvenire un metodo pronto onde costruire una tavola di seni e coseni degli archi che aumentando di 10 in 10 secondi si elevano da 0° a 45°. È evidente che trovati i seni e coseni si possono avere le altre linee, ed è anche chiaro che basta arrivare ai 45°, perchè al di là i seni si cambiano in coseni e viceversa fino ai 90° e al di là poi di questo ultimo limite si riduce al primo quadrante. A raggiungere lo scopo servono delle formule dovute al geometra inglese Simpson. Noi abbiamo trovato:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (a + b) + \text{sen. } (a - b) &= 2 \text{ sen. } a \cos. b, \\ \cos. (a + b) + \cos. (a - b) &= 2 \cos. a \cos. b. \end{aligned}$$

Si faccia $a = mb$ e si trasporti:

$$\begin{aligned} \text{sen. } (m + 1) b &= 2 \text{ sen. } mb \cos. b - \text{sen. } (m - 1) b, \\ \cos. (m + 1) b &= 2 \cos. mb \cos. b - \cos. (m - 1) b. \end{aligned}$$

Se si fa in queste formule $b = 10''$ e quindi $m = 1, 2, 3, 4$, ec., si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{sen. } 20'' &= 2 \text{ sen. } 10'' \cos. 10'', \\ \cos. 20'' &= 2 \cos.^2 10'' - 1, \\ \text{sen. } 30'' &= 2 \text{ sen. } 20'' \cos. 10'' - \text{sen. } 10'', \\ \cos. 30'' &= 2 \cos. 20'' \cos. 10'' - \cos. 10'', \\ &\vdots \end{aligned}$$

E così il calcolo della tavola riesce laborioso è vero, ma possibile e facile.

§ 6.

Le linee trigonometriche dello stesso nome di due archi dello stesso numero di gradi, ma di raggi differenti, stanno fra loro come i rispettivi raggi. **Definizione delle funzioni e delle equazioni omogenee.** Un'equazione la quale esprima una relazione esistente fra varie linee di una figura, è omogenea rispetto a queste linee quando le loro lunghezze son tutte rappresentate da lettere. Dalle formule trigonometriche relative ad archi di raggio 1 si possono facilmente dedurre quelle relative ad archi di raggio r , rendendo omogenee le prime coll'introduzione del raggio r .

Se si prendono le linee trigonometriche di due archi dello stesso numero di gradi, ma di diverso raggio, queste linee saran proporzionali ai raggi stessi (fig. 268).

Siano AB, MN gli archi simili ed AP, MQ i loro seni. Dai triangoli OAP, OMQ si ha:

$$AP : MQ :: OA : OM.$$

Ciò prova che i seni son proporzionali ai raggi. Quel che abbiám detto dei seni può dimostrarsi per le altre linee trigonometriche.

Ond'è che se a indica una linea trigonometrica di un arco di raggio 1, ed A quello dell'arco simile di raggio R , avremo la proporzione:

$$A : a :: R : 1,$$

donde $A = Ra$,

vale a dire che si ottengono le linee trigonometriche in un circolo di raggio qualsiasi moltiplicando quelle corrispondenti nel circolo di raggio 1 pel raggio nuovo.

ESEMPIO. Sapendo che nel raggio 1. $\text{sen. } 30^\circ = \frac{1}{2}$, nel raggio 3^m, 15 sarà $\text{sen. } 30^\circ = 1^{\text{m}}, 575$.

Si chiamano *funzioni* od *equazioni omogenee* quelle che hanno tutti i termini dello stesso grado rapporto alle lettere che vi entrano. E così $x^2 + ax + b^2$ è funzione omogenea di secondo grado in a, b, x , mentre $x^3 + ax + b$ non lo è.

Le equazioni algebriche che son la traduzione di problemi geometrici debbono di necessità essere omogenee. E difatti noi sappiamo che le linee son rappresentate da una lettera, le superfici dal prodotto di due linee e perciò da termini di secondo grado ed i volumi da termini di terzo grado. Ond'è che siccome le eguaglianze debbono di necessità stabilirsi fra quantità della medesima specie dovranno essere omogenee.

Le formule trigonometriche essendo state dedotte in prima origine dalle figure dovranno esse pure soddisfare alla condizione di essere omogenee. E se a prima vista non lo appariscono, ciò dipende dall'aver supposto il raggio eguale all'unità con che è scomparsa la traccia di questo raggio. Perciò ponendo in modo conveniente R al posto di 1 le formule ritorneranno omogenee, e così per passare dalle formule relative al raggio 1 a quelle che si riflettono al raggio R basta rendere omogenee le pruned.

ESEMPLI. Da:

$$\text{sen.}^2 a + \text{cos.}^2 a = 1,$$

si deduce: $\text{sen.}^2 a + \text{cos.}^2 a = R^2.$

Da: $\text{sen. } (a + b) = \text{sen. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } b \text{ cos. } a,$

viene: $\text{sen. } (a + b) = \frac{\text{sen. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } b \text{ cos. } a}{R}.$

Da: $\text{tang. } (a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b},$

risulta: $\text{tang. } (a + b) = \frac{R^2 (\text{tang. } a + \text{tang. } b)}{R^2 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}.$

§ 7.

Uso delle tavole dei logaritmi delle linee trigonometriche.

Noi abbiamo veduto come si poteva costruire una tavola di linee trigonometriche. Ma siccome nelle applicazioni in numeri i calcoli si eseguono ordinariamente mediante i logaritmi così si è trovato più comodo di costruire delle tavole che diano i logaritmi dei seni, coseni, tangenti e cotangenti degli archi espressi in gradi. Si son trascurate le secanti e cosecanti come quelle linee che non vengono mai applicate alla risoluzione dei triangoli. I seni e coseni, non che una parte delle tangenti essendo minori dell'unità è naturale che i loro logaritmi debbano essere negativi. Per ovviare a questo inconveniente molte tavole portano questi logaritmi aumentati ciascuno di dieci unità.

Nelle tavole invece che in algebra abbiain prese per norma, questi logaritmi delle linee trigonometriche contengono una caratteristica negativa ed una mantissa positiva.

Per i primi cinque gradi si hanno i logaritmi dei seni e tangenti in tavole in cui gli archi procedono di secondo in secondo. Così naturalmente avremo anche i logaritmi dei coseni e cotangenti da $90.^{\circ}$ a $85.^{\circ}$. I gradi son segnati fuori del quadro in alto e basso della pagina, in alto pei seni e tangenti, in basso pei coseni e cotangenti; i minuti occupano la prima ed ultima linea ed i secondi le colonne verticali di destra e sinistra e precisamente quelle di sinistra pei seni e tangenti e quelle di destra pei coseni e cotangenti.

Altre tavole che seguono e portano il numero VIII contengono i logaritmi delle quattro linee trigonometriche per variazione di archi di 10 in 10 secondi. I gradi son scritti fuor del quadro al disopra da $0.^{\circ}$ a $45.^{\circ}$ e al disotto da $45.^{\circ}$ a $90.^{\circ}$. Le colonne verticali di destra e sinistra contengono l'indicazione dei minuti e secondi e per l'appunto quelle di sinistra si riferiscono agli archi minori di $45.^{\circ}$ e quelle di dritta ai superiori. Le intestazioni nelle colonne orizzontali

alta e bassa *sen*, *tang*, *cotg*, *cos* indicano chiaramente a qual linea trigonometrica debbono riferirsi i logaritmi che vi sono sotto trascritti. Infine tre colonne intestate *D* indicano le differenze relative ai diversi logaritmi in simil guisa di ciò che fu spiegato nelle tavole ordinarie. Si trovano ancora calcolate le parti proporzionali di queste differenze per decimi che vengono così a corrispondere ad ogni minuto secondo.

Quando gli archi son dati in gradi e son di quelli che trovansi sulle tavole, una semplice ispezione delle medesime basta a trovare il logaritmo delle loro linee trigonometriche. Altrimenti occorre entrare in qualche dettaglio e tale è lo scopo dei problemi che seguono.

PROBLEMA 1.º *Dato un arco espresso in gradi, trovare il logaritmo del suo seno.*

Sia l'arco di $38.^\circ, 17', 43''$.

Trovato sulle tavole l'arco di $38.^\circ, 17', 40''$ che più vi si approssima per difetto, a pag. 519 vedremo;

$$\log. \text{sen. } 38.^\circ, 17' 40'' = \bar{1},7921836.$$

La differenza corrispondente per $3''$ che corrono dal 40 al 43 è trascritta a destra in 79,8. Ond'è che siccome i seni vanno crescendo al crescer degli archi, ammesso, lo che non influisce sebben non sia vero, che gli accrescimenti dei logaritmi sien proporzionali a quelli degli archi stessi, dovremo aggiungere 79,8 oppure 80 al logaritmo sopra trovato e così in definitiva verrà:

$$\log. \text{sen. } 38.^\circ, 17', 43'' = \bar{1},7921916.$$

PROBLEMA 2.º *Dato un arco trovare il logaritmo della sua tangente.*

Sia l'arco di $58.^\circ, 18', 49''$.

Procedendo in un modo perfettamente analogo al precedente si avrà a pag. 480:

$$\begin{array}{r} \log. \text{tang. } 58.^\circ, 18', 40'' = 0,2094723 \\ \text{diff. per } 9'' \dots\dots\dots 424 \\ \hline \log. 58.^\circ, 18', 49'' = 0,2095147 \end{array}$$

PROBLEMA 3.° *Dato un arco trovare il logaritmo del suo coseno.* Sia l'arco di:

$$43^{\circ}, 18', 37''.$$

Si trova nelle tavole che:

$$\log. \cos. 43^{\circ}, 18', 30'' = \bar{1}, 8619363.$$

La differenza corrispondente per $7''$ essendo 138,6 ossia circa 139, riflettendo che i coseni diminuiscono al crescere degli archi, dovremo sottrarla dal logaritmo sopra trovato e così in definitiva ne verrà:

$$\log. \cos. 43^{\circ}, 18' 37'' = \bar{1}, 8619224.$$

PROBLEMA 4.° *Dato un arco trovare il logaritmo della sua cotangente.* Sia l'arco:

$$51^{\circ}, 35', 57''.$$

A pag. 520 si trova:

$$\log. \cot. 51^{\circ}, 35', 50'' = 0, 1009080.$$

La differenza per $7''$ è 303 e siccome per una ragione consimile a quella indicata per i coseni, dobbiamo sottrarla dal logaritmo sopra trovato, avremo infine che:

$$\log. \cot. 51^{\circ}, 35', 57'' = 0, 1008777.$$

PROBLEMA 5.° *Dato il logaritmo di un seno trovare l'arco corrispondente.* Sia:

$$\log. \sin. x = \bar{1}, 5438728.$$

Andando a cercare nelle tavole il logaritmo che più si approssima a quello indicato e trovatolo essere $\bar{1}, 5438181$ si osserverà come al medesimo corrisponda un arco di $20^{\circ}, 28', 30''$. Notando poscia che la differenza fra i due logaritmi è 547 e che la tavola delle parti proporzionali dà per 507 secondi $9''$ ne concluderemo che l'arco in questione è approssimativamente $20^{\circ}, 28', 39''$.

PROBLEMA 6.° *Dato il logaritmo d'una tangente trovare l'arco corrispondente.* Sia:

$$\log. \tan. x = 0, 8715912.$$

Operando in un modo perfettamente analogo a ciò che fu fatto nel problema precedente si troverà:

$$\log. \tan. 82^{\circ}, 20', 40'' = 0,8715506.$$

Sottraendo questo logaritmo da quello dato si ha una differenza di 406 che nella tavola delle parti proporzionali non si trova esattamente essendo la differenza logaritmica delle tavole di 1595. Ma giovandosi della proporzione:

$$1595 : 10 :: 406 : y,$$

si avrà: $y = 2''$ circa,

è perciò l'arco dimandato è:

$$x = 82^{\circ}, 20' 42''.$$

PROBLEMA 7.° *Dato il logaritmo di un coseno trovare l'arco corrispondente.* Sia:

$$\log. \cos. x = \bar{1},5432751.$$

Il logaritmo più prossimo per difetto che si riscontra nelle tavole è $\bar{1},5432538$ a cui corrisponde un arco di $69^{\circ} 33', 10''$. La differenza fra questo logaritmo e quello dato è 213 e siccome quella delle tavole è 565 la consueta proporzione:

$$565 : 10 :: 213 : y = 3'',$$

ci darà $3''$ che dovremo sottrarre dall'arco sopra trovato giacchè si tratta di una linea trigonometrica che decresce all'aumentare dell'arco. Si avrà così:

$$x = 69^{\circ}, 33', 7''.$$

PROBLEMA 8.° *Dato il logaritmo di una cotangente determinare l'arco corrispondente.* Sia:

$$\log. \cot. x = 0,8315217.$$

Si opererà in modo perfettamente analogo a ciò che fu fatto nel Problema precedente. Si avrà così:

$$\log. \cot. 8^{\circ}, 23', 10'' = 0,8314452.$$

Da questo logaritmo a quello dato corre la differenza 765; quella tabulare è invece 1459; può dunque stabilirsi la proporzione:

$$1459 : 10 :: 765 : y = 5'',$$

e perciò: $x = 8^\circ, 23', 5''$.

PROBLEMA 9.° *Dato un arco in gradi determinare le sue linee trigonometriche per mezzo delle tavole.*

Sia l'arco di $43^\circ, 18', 20''$ del quale si vuol conoscere il seno. Trovato nelle tavole delle linee trigonometriche che:

$$\log. \text{sen. } 43^\circ, 18', 20'' = \bar{1}, 8362538,$$

si andrà nelle tavole dei logaritmi ordinari a trovare il numero corrispondente e si avrà così:

$$\text{sen. } 43^\circ, 18', 20'' = 0, 68588 \text{ circa.}$$

PROBLEMA 10.° *Data una linea trigonometrica trovare l'arco che le corrisponde in gradi, minuti e secondi. Sia:*

$$\cot. x = 1^{\text{a}}, 25.$$

Dalla tavola dei logaritmi ordinari si avrà:

$$\log. \cot. x = \log. 1, 25 = 0, 0969100,$$

quindi dalle tavole trigonometriche:

$$x = 38^\circ, 39', 35'' \text{ circa.}$$

Ciò che abbiamo detto nel problema 9° per i seni e nel 10° per le cotangenti si applica in modo consimile alle altre linee trigonometriche.

§ 8.

Definizione delle linee trigonometriche di un angolo. In ogni triangolo rettangolo: 1.° Ciascun cateto è eguale all'ipotenusa moltiplicata pel coseno dell'angolo adiacente o pel seno dell'angolo opposto. 2.° La tangente di un angolo acuto è uguale al cateto opposto diviso pel cateto adiacente. Applicazione di questi teoremi alla risoluzione dei triangoli rettangoli.

Si chiamano *linee trigonometriche di un angolo* le linee trigonometriche dell'arco che lo misura, vale a dire descritto dal suo vertice come centro e con raggio eguale all'unità.

In ogni triangolo rettangolo:

1.° *Un cateto qualunque eguaglia il prodotto dell'ipotenusa pel seno dell'angolo opposto, ovvero pel coseno di quello acuto adiacente.*

2.° *La tangente di un angolo acuto è eguale al cateto opposto diviso pel cateto adiacente.*

1.° Sia ABC (fig. 268) il triangolo dato rettangolo in A . Fatto centro in B e con raggio eguale all'unità descritto l'arco di cerchio NM , il suo seno e la sua tangente saranno il seno e la tangente dell'angolo B . Ciò posto se si indicano i lati del triangolo con le piccole lettere degli angoli opposti e si riflette alla similitudine dei triangoli BMP , BAC avremo la proporzione:

$$PM : BM :: AC : BC$$

ossia: $\text{sen. } B : 1 :: b : a$

da cui: $b = a \text{ sen. } B.$

Riflettendo poscia che gli angoli acuti B e C sono complementari e che perciò $\text{sen. } B = \cos. C$, ne viene:

$$b = a \cos. C.$$

2.° I triangoli simili BNT , BAC , danno la proporzione:

$$NT : BN :: AC : AB,$$

ovvero: $\text{tang. } B : 1 :: b : c,$

donde: $\text{tang. } B = \frac{b}{c}.$

Riflettendo poi che $\text{tang. } B = \cot. C$, si otterrà anche:

$$\cot. C = \frac{b}{c}.$$

Risolvere un triangolo significa determinare algebricamente tre dei suoi elementi quando son cogniti gli altri tre, purchè fra questi ultimi vi sia un lato. Quando il triangolo è rettangolo, basterà perciò che si conoscano solo due elementi giacchè l'angolo retto forma il terzo.

Noi indicheremo sempre con B, C i due angoli acuti del triangolo rettangolo, con b, c i loro lati opposti, con a l'ipotenusa. Potranno allora presentarsi quattro casi diversi di risoluzione.

CASO 1.

Data l'ipotenusa ed un cateto trovare l'altro cateto ed i due angoli acuti.

Sia a l'ipotenusa e b il cateto dati. Avremo:

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

donde:
$$c = \sqrt{(a + b)(a - b)},$$

$$\log. c = \frac{1}{2} \left[\log. (a + b) + \log. (a - b) \right],$$

$$b = a \operatorname{sen.} B, \quad \operatorname{sen.} B = \frac{b}{a},$$

$$\log. \operatorname{sen.} B = \log. b - \log. a, \quad C = 90.^\circ - B.$$

ESEMPIO NUMERICO. Sia:

$$a = 7^m, 25, \quad b = 5^m, 38, \quad a + b = 12^m, 63, \quad a - b = 1^m, 87.$$

Calcolo di c :

$$\log. (a + b) = \dots\dots\dots 1, 1014034$$

$$\log. (a - b) = \dots\dots\dots 0, 2718416$$

$$2 \log. c = \dots\dots\dots 1, 3732450$$

$$\log. c = \dots\dots\dots 0, 6866225$$

Cercando nelle tavole $c = 4, 860$ circa.

Calcolo di B :

$$\log. b = \dots\dots\dots 0, 7307823$$

$$\log. a = \dots\dots\dots 0, 8603380$$

indi: $\log. \operatorname{sen.} B = \dots\dots\dots \overline{1}, 8704443$

e perciò dalle tavole $B = 47.^\circ, 54', 28''$.

$$C = 90.^\circ - B = 90.^\circ - 47.^\circ, 54', 28'' = 42.^\circ, 5', 32''.$$

CASO 2.°

Data l'ipotenusa e un angolo acuto, trovare l'altro angolo e i due cateti.

Sia data l'ipotenusa a e l'angolo B . Avremo dapprima:

$$C = 90.^{\circ} - B,$$

indi: $b = a \operatorname{sen.} B, c = a \operatorname{cos.} B,$

e passando ai logaritmi:

$$\log. b = \log. a + \log. \operatorname{sen.} B,$$

$$\log. c = \log. a + \log. \operatorname{cos.} B.$$

ESEMPIO NUMERICO. Sia:

$$a = 18^m, 73, B = 52.^{\circ}, 18'.$$

Avremo: $C = 37.^{\circ}, 42'.$

Calcolo di b :

$$\log. a = 1, 2725378$$

$$\log. \operatorname{sen.} B = \overline{1}, 8982992$$

$$\log. b = 1, 1708370$$

e perciò $b = 14^m, 82$ circa.

Calcolo di c :

$$\log. a = 1, 2725378$$

$$\log. \operatorname{cos.} B = \overline{1}, 7864157$$

$$\log. c = 1, 0589535$$

donde in forza delle tavole $c = 11^m, 45$ circa.

CASO 3.°

Dati i due cateti, determinare l'ipotenusa e i due angoli acuti.

Siano b, c i cateti dati. L'ipotenusa a potrebbe aversi dalla formula:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2},$$

ma siccome questa formula non è calcolabile per logaritmi è d'uopo dapprima trovare i due angoli.

Ora si ha: $\text{tang. } B = \frac{b}{c},$

e perciò: $\log. \text{tang. } B = \log. b - \log. c.$

E così si avrà B , e poscia:

$$C = 90.^\circ - B.$$

Quindi: $a = \frac{b}{\text{sen. } B},$

$$\log. a = \log. b - \log. \text{sen. } B.$$

ESEMPIO NUMERICO. Sia:

$$b = 375^m, c = 214^m.$$

Calcolo di B :

$$\log. b = 2, 5740313$$

$$\log. c = 2, 3304138$$

$$\log. \text{tang. } B = 0, 2436175$$

da cui $B = 60.^\circ, 17', 16''$ circa,

$$C = 90.^\circ - B = 29.^\circ, 42', 44''.$$

Calcolo di a :

$$\log. b = 2, 5740313$$

$$\log. \text{sen. } B = 1, 9387827$$

$$\log. a = 2, 6352486$$

e perciò $a = 431^m, 76.$

CASO 4.°

Dato un cateto e un angolo acuto, trovare gli altri elementi.

Sia b il cateto e C l'angolo acuto dato. Avremo dapprima:

$$B = 90.^\circ - C,$$

indi: $\text{tang. } C = \frac{c}{b},$

da cui: $c = b \text{ tang. } C,$

e passando ai logaritmi:

$$\log. c = \log. b + \log. \tan. C,$$

$$a = \frac{b}{\cos. C}, \text{ e } \log. a = \log. b - \log. \cos. C.$$

ESEMPIO NUMERICO. Sia:

$$b = 1847^m, \text{ e } C = 38.^{\circ}, 15'.$$

Avremo: $B = 90.^{\circ} - 38.^{\circ}, 15' = 51.^{\circ}, 45'.$

Calcolo di c :

$$\log. b = \dots\dots\dots 3, 2664669$$

$$\log. \tan. C = \dots\dots\dots 1, 8967116$$

$$\log. c = \dots\dots\dots 3, 1631785$$

e perciò $c = 1456^m, 05$ circa.

Calcolo di a :

$$\log. b = \dots\dots\dots 3, 2664669$$

$$\log. \cos. C = \dots\dots\dots 1, 8950450$$

$$\log. a = \dots\dots\dots 3, 3714219$$

e perciò $a = 2351^m, 91$ circa.

§ 9.

In un triangolo qualunque: 1.° Il quadrato di un lato è eguale alla somma dei quadrati degli altri due, meno il doppio del prodotto di questi moltiplicati pel coseno dell'angolo compreso; 2.° I seni degli angoli stanno fra loro come i lati opposti; 3.° La somma di due lati sta alla loro differenza, come la tangente della semi-somma degli angoli opposti sta alla tangente della loro semi-differenza. Formule atte al calcolo logaritmico che servono per trovare gli angoli di un triangolo quando ne sono dati i lati. Risoluzione dei triangoli obliquangoli. Misura delle distanze inaccessibili. Espressione dell'area di un triangolo in funzione di due lati e dell'angolo compreso.

In un triangolo qualunque il quadrato di un lato è eguale alla somma dei quadrati degli altri due meno il doppio del prodotto di questi moltiplicati pel coseno dell'angolo compreso.

Sia ABC (fig. 269) il triangolo nel quale per convenzione indicheremo sempre gli angoli colle lettere maiuscole A, B, C

e i lati con le lettere minuscole degli angoli opposti. Considerato un lato qualunque c e supposto che l'angolo C sia acuto, avremo per un cognito teorema di geometria:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times CO.$$

Ma nel triangolo rettangolo CAO si sa che $CO = b \cos. C$ e perciò sostituendo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. C.$$

Ove l'angolo C fosse ottuso si sa dalla geometria (*fig. 270*) che:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \times CO.$$

Ma nel triangolo rettangolo CAO risulta $CO = b \cos. ACO$ e siccome l'angolo ACO è supplementare di ACB da noi indicato con C ne viene $\cos. ACO = -\cos. C$ e quindi $CO = -b \cos. C$ per cui sostituendo si ritorna a:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. C,$$

come si voleva provare.

I seni degli angoli stanno fra loro come i lati opposti.

Sia ABC (*fig. 269*) un triangolo qualunque. Tirata una delle sue altezze CO avremo dal triangolo rettangolo AOC che:

$$AO = b \sin. C,$$

e dall'altro pure rettangolo ACB :

$$AB = c \sin. B,$$

e perciò: $b \sin. C = c \sin. B,$

da cui: $b : c :: \sin. B : \sin. C,$

che è quello che si voleva dimostrare.

La somma di due lati sta alla loro differenza come la tangente della semi-somma degli angoli opposti sta alla tangente della semi-differenza.

Dalla proporzione:

$$a : b :: \sin. A \sin. B,$$

ne viene componendo per somma e sottrazione che:

$$a + b : a - b :: \sin. A + \sin. B : \sin. A - \sin. B.$$

Ma si sa che:

$$\begin{aligned} \text{sen. } A + \text{sen. } B : \text{sen. } A - \text{sen. } B &:: \text{tang. } \frac{1}{2} (A + B) \\ &: \text{tang. } \frac{1}{2} (A - B), \end{aligned}$$

e perciò dal paragone di queste due proporzioni ne emerge la terza:

$$a + b : a - b :: \text{tang. } \frac{1}{2} (A + B) : \text{tang. } \frac{1}{2} (A - B).$$

Dalla prima delle proprietà dimostrate sulle relazioni che corrono fra i lati e gli angoli di un triangolo, vale a dire dalla equazione:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. C,$$

ne viene:

$$\cos. C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Quest'ultima dà il coseno di un angolo in funzione dei tre lati, ma non si presta al calcolo logaritmico. Ad averne una di tal genere, giova osservare che:

$$\cos. \frac{1}{2} C = \frac{1 + \cos. C}{2},$$

e quindi sostituendo a $\cos. C$ il suo valore:

$$\cos. \frac{1}{2} C = \frac{1 + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)}{2},$$

e riducendo al comun denominatore:

$$\cos. \frac{1}{2} C = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{4ab},$$

o anche:

$$\cos. \frac{1}{2} C = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}.$$

Posto ora $a + b + c = 2p$, vale a dire chiamando p il semi-perimetro, questa espressione si trasforma nell'altra:

$$\cos. \frac{1}{2} C = \frac{p(p-c)}{ab},$$

e:
$$\cos. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Questa espressione è adattata all'uso dei logaritmi.

Operando in simil guisa per gli altri angoli si sarebbe ottenuto:

$$\cos. \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},$$

$$\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Si possono anche determinare i tre angoli $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{2} B$, $\frac{1}{2} C$, mediante dei seni. A tal uopo si rifletta che:

$$\text{sen.}^2 \frac{1}{2} C = \frac{1 - \cos. C}{2},$$

ond'è che posto per $\cos. C$ il suo valore viene:

$$\text{sen.}^2 \frac{1}{2} C = \frac{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)}{2},$$

e riducendo il secondo membro ad un solo denominatore:

$$\text{sen.}^2 \frac{1}{2} C = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{4ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab}.$$

Posto $a + b + c = 2p$ e osservato che il valore di $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} C$ può anche scriversi:

$$\text{sen.}^2 \frac{1}{2} C = \frac{(c+a-b)(c+b-a)}{4ab},$$

esso diviene:

$$\text{sen.}^2 \frac{1}{2} C = \frac{(p-b)(p-a)}{ab},$$

$$\text{sen.} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}.$$

Operando in un modo del tutto analogo per gli altri angoli, ne verrà:

$$\text{sen. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\text{sen. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Se infine si cercasse di determinare i tre angoli mediante delle tangenti, non si ha da far altro che dividere seni per coseni e si ottiene:

$$\text{tang. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{p(p-c)}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Risoluzione dei Triangoli Obliquangoli.

Nella risoluzione dei triangoli qualunque possono presentarsi varii casi secondoche è dato un lato e due angoli, oppure un angolo e due lati, ovvero i tre lati.

CASO 1.°

È dato un lato e due angoli.

Sia cognito il lato a e gli angoli A, B . Avremo dapprima:

$$C = 180.^\circ - A - B,$$

e dalle relazioni:

$$a : b :: \text{sen. } A : \text{sen. } B,$$

$$a : c :: \text{sen. } A : \text{sen. } C,$$

dedurremo:

$$b = \frac{a \text{ sen. } B}{\text{sen. } A}, \quad c = \frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A},$$

per cui passando ai logaritmi:

$$\log. b = \log. a + \log. \text{sen. } B + \text{comp. log. sen. } A - 10,$$

$$\log. c = \log. a + \log. \text{sen. } C + \text{comp. log. sen. } A - 10.$$

In questi calcoli è utile adottare i complementi onde non avere due operazioni diverse, ma invece una sola somma da effettuare.

ESEMPIO :

$$a = 8^m, 15, B = 46.^{\circ} 20' A = 39.^{\circ}, 54'.$$

Avremo :

$$C = 180.^{\circ} - 46.^{\circ}, 20' - 39.^{\circ}, 54' = 93.^{\circ}, 46'.$$

Calcolo di b .

$$\log. a = 0, 9111576$$

$$\log. \text{sen. } B = \overline{1} 8593599$$

$$\text{comp. log. sen. } A = . . 10, 1928374$$

$$\log. b = 0, 9633549$$

e perciò $b = 9^m, 19$ circa.

Calcolo di c .

$$\log. a = 0, 9111576$$

$$\log. \text{sen. } C \overline{1}, 9990608$$

$$\text{comp. log. sen. } A = . . 10, 1928374$$

$$\log. c = 1, 1030558$$

e perciò $c = 12.^m, 68$ circa.

CASO 2.°

Son dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.

I lati sieno a, b e l'angolo A .

Prima di tutto l'angolo B potrà conoscersi dalla formula:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}$$

che dà :
$$\text{sen. } B = \frac{b \text{ sen. } A}{a}$$

e mediante i logaritmi :

$$\log. \text{sen. } B = \log. b + \log. \text{sen. } A + \text{comp. log. } a - 10.$$

Se non che vuolsi notare che quando si sarà trovato per B un angolo minore di 90° , anche il suo supplemento $180^\circ - B$ potrà soddisfare al problema come avente lo stesso seno. A vedere se realmente questa seconda soluzione è possibile, basta sommare i due angoli già trovati del triangolo; questa somma deve stare al di sotto di 180° . E perciò se $A + 180^\circ - B < 180^\circ$ ossia $A < B$ e perciò $a < b$ questo caso presenta due soluzioni.

Se invece $A > B$ ovvero $a > b$ non può esservi che una sola soluzione.

Potrebbe anche accadere che si trovasse $b \operatorname{sen} A > a$ e quindi $\operatorname{sen} B > 1$, lo che nel calcolo logaritmico si manifesta da un risultato che non ha caratteristica negativa. Allora il problema è impossibile giacchè i seni non possono mai oltrepassare l'unità. Ciò significa in linguaggio geometrico che il lato a è troppo piccolo e minore del cateto di triangolo rettangolo avente b per ipotenusa e A per angolo acuto opposto.

E così la discussione del problema che ora ci occupa, corrisponde esattamente a quella che già ne venne fatta in geometria.

Determinato l'angolo B si otterrà C dall'eguaglianza:

$$C = 180^\circ - A - B,$$

e quindi il lato c dalla relazione:

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

a cui applicando i logaritmi risulta:

$$\log. c = \log. a + \log. \operatorname{sen} C + \operatorname{comp} \log. \operatorname{sen} A - 10.$$

ESEMPIO 1.° Sia $A = 39^\circ 43' 20''$ $a = 87^m$, $b = 102^m$.

Calcolo di B .

$$\begin{array}{rcl} \log. b = & & 2,0086002 \\ \log. \operatorname{sen} A = & & \overline{1},8055458 \\ \operatorname{comp} \log. a = & & 8,0604807 \\ & & \hline \log. \operatorname{sen} B = & . . . & \overline{1},8746267 \end{array}$$

da cui: $B = 48.^{\circ}, 31' 31''$

oppure: $B' = 131.^{\circ}, 28' 29''$.

Calcolo di C .

$$C = 180.^{\circ} - A - B = 91.^{\circ} 45', 9'',$$

$$C' = 180.^{\circ} - A - B' = 8.^{\circ} 48', 11''.$$

Calcolo di c .

$$\log. a = \dots\dots\dots 1, 9395193$$

$$\log. \text{sen. } C = \dots\dots\dots \overline{1}, 9997968$$

$$\text{comp. log. sen. } A = \dots\dots\dots 10, 1944542$$

$$\log. c = \dots\dots\dots \underline{2, 1337703}$$

e perciò $c = 136^{\text{m}}, 07$ circa.

Calcolo del secondo valore di c .

$$\log. a = \dots\dots\dots 1, 9395193$$

$$\log. \text{sen. } C' = \dots\dots\dots \overline{1}, 1899470$$

$$\text{comp. log. sen. } A = \dots\dots\dots 10, 1944542$$

$$\log. c' = \dots\dots\dots \underline{1, 3239205}$$

e perciò $c' = 21^{\text{m}}, 082$ circa.

ESEMPIO 2.° Abbiassi:

$$A = 43.^{\circ}, a = 1316^{\text{m}}, b = 988^{\text{m}}.$$

Calcolo di B :

$$\log. b = \dots\dots\dots 2, 9947569$$

$$\log. \text{sen. } A = \dots\dots\dots \overline{1}, 8337833$$

$$\text{comp. log. } a = \dots\dots\dots 6, 8807441$$

$$\log. \text{sen. } B \dots\dots \underline{\overline{1}, 7092843}$$

e perciò $B = 30.^{\circ}, 47', 53''$.

L'angolo B non ha che un solo valore:

$$C = 180.^{\circ} - A - B = 106.^{\circ}, 12', 7''.$$

Calcolo di c :

$$\log. a = \dots\dots\dots 3, 1192559$$

$$\log. \text{sen. } C = \dots\dots\dots \overline{1}, 9823998$$

$$\text{comp. log. sen. } A = \dots\dots\dots 10, 1662167$$

$$\log. c = \dots\dots\dots \underline{3, 2678724}$$

e perciò $c = 1852, 98$ circa.

ESEMPIO 3.° Si ha:

$$A = 125^{\circ}, 48', a = 8^m, 25, b = 7^m, 48.$$

Calcolo di B :

$$\log. b = \dots\dots\dots 0,8739016$$

$$\log. \text{sen. } A = \dots\dots\dots \overline{1},9090550$$

$$\text{comp. log. } a = \dots\dots\dots 9,0835461$$

$$\log. \text{sen. } B = \dots\dots 1,8665027$$

e perciò $B = 47^{\circ}, 20', 12''$ circa, valore unico:

$$C = 180^{\circ} - A - B = 6^{\circ}, 51', 48''.$$

Calcolo di c :

$$\log. a = \dots\dots\dots 0,9164539$$

$$\log. \text{sen. } C = \dots\dots\dots \overline{1},0773734$$

$$\text{comp. log. sen. } A = \dots\dots 10,0909450$$

$$\log. c = \dots\dots 0,0847723$$

e perciò $c = 1^m, 215$ circa.

ESEMPIO 4.°:

$$A = 31^{\circ}, 12', 20'', b = 78^m, a = 28^m, 10.$$

Calcolo di B :

$$\log. b = \dots\dots\dots 1,8920946$$

$$\log. \text{sen. } A = \dots\dots\dots \overline{1},7144219$$

$$\text{comp. log. } a = \dots\dots\dots 8,5512937$$

$$\log. \text{sen. } B = \dots\dots 0,1578102$$

Questo logaritmo essendo positivo è evidente che l'angolo B non può esistere, e che perciò con i dati elementi non si può costruire verun triangolo.

CASO 3.°

Dati due lati e l'angolo compreso in un triangolo, determinare gli altri elementi.

Siano a, b i lati e C l'angolo da essi compreso. Noi sappiamo che:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (A-B)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (A+B)},$$

donde:

$$\text{tang. } \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} \text{tang. } \frac{1}{2} (A + B).$$

Ma: $A + B = 180^\circ - C,$

perciò: $\frac{1}{2} (A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2} C,$

e: $\text{tang. } \frac{1}{2} (A + B) = \cot. \frac{1}{2} C,$

e perciò il valore di $\text{tang. } \frac{1}{2} (A - B)$ si converte in:

$$\frac{a - b}{a + b} \cot. \frac{1}{2} C,$$

e riesce così determinabile in funzione di quantità cognite, e per logaritmi, giacchè sarà:

$$\begin{aligned} \log. \text{tang. } \frac{1}{2} (A - B) &= \log. (a - b) + \\ \log. \cot. \frac{1}{2} C &+ \text{comp. log. } (a + b) - 10. \end{aligned}$$

Trovato l'angolo $\frac{1}{2} (A - B)$, e perciò $A - B$ siccome si conosce già $A + B$ potremo anche determinare A, B . Difatto se:

$$A + B = M, \quad A - B = N,$$

ne viene: $A = \frac{1}{2} (M + N),$

$$B = \frac{1}{2} (M - N).$$

Conosciuti i due angoli A e B rimane a trovare il lato c e lo potremmo avere dalla formula.

$$c = \frac{a \text{ sen. } C}{\text{sen. } a}.$$

Ma si può esigere di avere direttamente il lato c in funzione dei dati del problema onde non accumulare gli errori inevitabili che emergono dall'impiego delle tavole. A quest'oggetto si osserverà che:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. C,$$

formula che risolverebbe la quistione qualora si prestasse al calcolo logaritmico. Si tratta adunque di trasformarla onde corrisponda a questo scopo. Perciò siccome:

$$1 = \cos.^2 \frac{1}{2} C + \sin.^2 \frac{1}{2} C,$$

$$\cos. C = \cos.^2 \frac{1}{2} C - \sin.^2 \frac{1}{2} C,$$

possiamo scrivere:

$$c^2 = (a^2 + b^2) \left(\cos.^2 \frac{1}{2} C + \sin.^2 \frac{1}{2} C \right) - 2 a b \left(\cos.^2 \frac{1}{2} C - \sin.^2 \frac{1}{2} C \right)$$

ovvero:

$$c^2 = (a + b)^2 \sin.^2 \frac{1}{2} C + (a - b)^2 \cos.^2 \frac{1}{2} C,$$

o anche ponendo in fattor comune $(a + b)^2 \sin.^2 \frac{1}{2} C$:

$$c^2 = (a + b)^2 \sin.^2 \frac{1}{2} C \left[1 + \left(\frac{a - b}{a + b} \right)^2 \cot.^2 \frac{1}{2} C \right].$$

Ma noi abbiamo già trovato che:

$$\frac{a - b}{a + b} \cot. \frac{1}{2} C = \text{tang.} \frac{1}{2} (A - B) = \text{tang.} \phi,$$

indicando per semplicità con ϕ l'angolo ausiliare $\frac{1}{2} (A - B)$, quindi,

$$c^2 = (a + b)^2 \sin.^2 \frac{1}{2} C (1 + \text{tang.}^2 \phi),$$

ovvero:

$$c^2 = (a + b)^2 \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} C}{\cos.^2 \phi}$$

ed estraendo radice:

$$c = \frac{(a + b) \sin. \frac{1}{2} C}{\cos. \phi}$$

a cui applicando i logaritmi:

$$\log. c = \log. (a + b) + \log. \sin. \frac{1}{2} C + \text{comp. log.} \cos \phi - 10.$$

ESEMPIO NUMERICO. Sia $a = 38^m$, $b = 53^m$, $C = 64^\circ, 20'$.

Sarà $a + b = 91^m$, $b - a = 15^m$, $\frac{1}{2} C = 32^\circ, 10'$:

$$A + B = M = 180^\circ - C = 115^\circ 40'.$$

Calcolo di $\frac{1}{2} (B - A) = \frac{N}{2}$.

$$\log. (b - a) = \dots\dots\dots 1, 1760913$$

$$\log. \cot. \frac{1}{2} C = \dots\dots\dots 0, 2014036$$

$$\text{comp. log. } (a + b) = \dots\dots\dots 8, 0409586$$

$$\log. \tan. \frac{1}{2} (B - A) = \dots\dots\dots \overline{1}, 4184535$$

quindi: $\frac{1}{2} (B - A) = 14^\circ 41' 11''$,

e: $B - A = N = 29^\circ 22' 22''$.

Ond' è che: $B = \frac{1}{2} (M + N) = 72^\circ 31' 11''$,

$$A = \frac{1}{2} (M - N) = 43^\circ, 8', 49''.$$

Calcolo di c .

$$\log. (a + b) = \dots\dots\dots 1, 9590414$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} C = \dots\dots\dots \overline{1}, 7262249$$

$$\text{comp. log. cos. } \varphi = \dots\dots\dots 10, 0144262$$

$$\log. c = \dots\dots\dots 1, 6996925$$

e perciò: $c = 50^m 08$ circa.

CASO 4.°

Dati i tre lati trovare i tre angoli di un triangolo.

A risolvere questo caso servono le formule che abbiamo già date e che determinano gli angoli in funzione dei lati mediante i seni, coseni o tangenti. Fra queste la scelta è libera. Ma riflettendo che coll'uso dei seni le formule stesse esigono che si cerchi sei logaritmi, con quello dei coseni

sette e invece coll'uso delle tangenti solamente quattro adotteremo queste ultime linee che sono:

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

alle quali applicando i logaritmi resulta:

$$\begin{aligned} \log. \text{tang. } \frac{1}{2} A &= \frac{1}{2} [\log. (p-b) + \log. (p-c) \\ &+ \text{comp. log. } p + \text{comp. log. } (p-a)] - 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. \text{tang. } \frac{1}{2} B &= \frac{1}{2} [\log. (p-a) + \log. (p-c) + \\ &+ \text{comp. log. } p + \text{comp. log. } (p-b)] - 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. \text{tang. } \frac{1}{2} C &= \frac{1}{2} [\log. (p-a) + \log. (p-b) + \\ &+ \text{comp. log. } p + \text{comp. log. } (p-c)] - 10. \end{aligned}$$

ESEMPIO NUMERICO. Sia:

$$a = 38^{\text{m}}, 20, \quad b = 27^{\text{m}}, 40, \quad c = 42^{\text{m}}, 15,$$

ne verrà: $2p = 107^{\text{m}}, 75$ e $p = 53^{\text{m}}, 875,$

$$p - c = 11^{\text{m}}, 725, \quad p - b = 26^{\text{m}}, 475, \quad p - a = 15^{\text{m}}, 675.$$

Calcolo di $\frac{1}{2} A$.

$\log. (p-b) =$	1, 4228360
$\log. (p-c) =$	1, 0691129
$\text{comp. log. } p =$	8, 2686127
$\text{comp. log. } (p-a) = .$	8, 8047925
	<hr/>
$2. . .$	19, 5653541
	9, 7826770
$\log. \text{tang. } \frac{1}{2} A = . . .$	1, 7826770

e perciò : $\frac{1}{2} A = 31.^{\circ}, 13' 40''$

ed : $A = 62.^{\circ}, 27' 20''$.

Calcolo di $\frac{1}{2} B$.

$\log. (p - a) =$	1, 1952075
$\log. (p - c) =$	1, 0691129
$\text{comp. log. } p =$	8, 2686127
$\text{comp. log. } (p - b) . . .$	8, 5771640
	<hr/>
2. . .	19, 1100971
	9, 5550485
$\log. \text{tang. } \frac{1}{2} B = . . .$	$\overline{1}, 5550485$

e perciò:

$$\frac{1}{2} B = 19.^{\circ}, 44' 46'' \text{ e } B = 39.^{\circ}, 29', 32''.$$

Calcolo di $\frac{1}{2} C$.

$\log. (p - a) =$	1, 1952075
$\log. (p - b) =$	1, 4228360
$\text{comp. log. } p =$	8, 2686127
$\text{comp. log. } (p - c) = .$	8, 9308871
	<hr/>
2. . .	19, 8175433
	9, 9087716
$\log. \text{tang. } \frac{1}{2} C = . . .$	$\overline{1}, 9087716$

e perciò : $\frac{1}{2} C = 39.^{\circ}, 1'. 33''$

e : $C = 78.^{\circ}, 3', 6''$.

Si verifica l'esattezza dei calcoli osservando che la somma $A + B + C$ deve essere di $180.^{\circ}$. Nell'esempio scelto risulta invece di $179.^{\circ}, 59', 58''$, e la differenza proviene dagli errori inevitabili che sono inerenti all'uso dei logaritmi. Questa

differenza di 2 secondi si repartisce sugli angoli del triangolo, risultando così :

$$A = 62.^{\circ}, 27', 21''$$

$$B = 39.^{\circ}, 29', 32''$$

$$C = 78.^{\circ}, 3', 7''.$$

Misura delle distanze inaccessibili.

Per l'esecuzione di queste misure si suppone di avere uno strumento che serva a misurare gli angoli sul terreno; la descrizione e l'uso di simili strumenti non è però di pertinenza della trigonometria, alla quale spetta solo l'indicare le misure che occorre prendere e i calcoli che si debbono fare onde raggiungere lo scopo definitivo.

Sia adunque AB , (*fig. 271*) la distanza inaccessibile da misurarsi. Misurata una base accessibile CD , si determineranno in gradi, minuti e secondi le grandezze dei quattro angoli ACD , BCD , ADC , BDC . Allora nel triangolo BCD essendo cogniti due angoli e un lato potremo trovare il lato BC col metodo dato nel 1.° caso della risoluzione dei triangoli obliquangoli. In simil guisa dal triangolo ACD avremo la AC . Ed allora nel triangolo ABC conoscendo due lati AC , BC e l'angolo compreso ACB come differenza di ACD e BCD potremo determinare, mediante l'applicazione del 3.° caso, il lato AB che è appunto quello che si cercava.

Ove la distanza AB fosse accessibile ad una delle sue estremità (*fig. 272*) si misurerà una base AC che passi per A , indi si determineranno gli angoli BAC , BCA . La semplice risoluzione del triangolo BAC somministrerà la AB .

Abbiasi per un esempio numerico del primo caso la base $CD = 50^m$, e gli angoli $ACD = 78.^{\circ}, 15'$:

$$BCD = 46.^{\circ}, BDC = 69.^{\circ}, 20', ADC = 44.^{\circ}, 10'.$$

Ecco lo sviluppo del calcolo. Dal triangolo BCD (1.° caso) si ha BC .

Calcolo di BC :

$$\begin{array}{rcl} \log. CD = & & 1,6989700 \\ \log. \text{sen. } BDC (69^\circ, 20') = & & \overline{1,9711132} \\ \text{comp. log. sen. } CBD (64^\circ, 40') = & . . . & 10,0439114 \\ & & \hline \log. BC = & & 1,7139946 \end{array}$$

e quindi $BC = 51^m, 76$ circa.

Dal triangolo ACD si ha AC .

Calcolo di AC :

$$\begin{array}{rcl} \log. CD = & & 1,6989700 \\ \log. \text{sen. } ADC (44^\circ, 10') = & & \overline{1,8430757} \\ \text{comp. log. sen. } CAD (57^\circ, 35') = & . . . & 10,0735690 \\ & & \hline \log. AC = & & 1,6156147 \end{array}$$

e quindi $AC = 41^m, 27$ circa.

Il triangolo ABC serve a calcolare AB (3.° Caso) e a quest'uopo occorre prima determinare ϕ angolo ausiliare e quindi il lato AB mediante le formule:

$$\begin{aligned} \text{tang. } \phi &= \frac{BC - AC}{BC + AC} \cot. \frac{1}{2} ACB, \\ AB &= \frac{(BC + AC) \text{sen. } \frac{1}{2} ACB}{\cos. \phi} \end{aligned}$$

Calcolo di ϕ :

$$\begin{array}{rcl} \log. (BC - AC) = & & 1,0207755 \\ \log. \cot. \frac{1}{2} ACB (16^\circ, 7', 30'') = & . . . & 0,5399400 \\ \text{comp. log. } (BC + AC) = & & 8,0313770 \\ & & \hline \log. \text{tang. } \phi = & & \overline{1,5980925} \end{array}$$

e perciò $\phi = 21^\circ, 18', 25''$.

Calcolo di AB :

$$\begin{array}{rcl} \log. (BC + AC) = & & 1,9686230 \\ \log. \text{sen. } \frac{1}{2} ACB = & & \overline{1,4436288} \\ \text{comp. log. cos. } \phi = & & 10,0307485 \\ & & \hline \log. AB = & & 1,4430003 \end{array}$$

e quindi in definitiva $AB = 27^m, 73$.

Per dare anche un esempio numerico del caso in cui la distanza incognita è accessibile ad una estremità (*fig. 272*), supponiamo essere la base $CA = 88^m$, l'angolo $BAC = 85^\circ$ e $BCA = 51^\circ, 20'$. Nel triangolo BAC sarà:

$$AB = AC \frac{\text{sen. } BCA}{\text{sen. } BAC}.$$

Calcolo di AB :

$$\log. AC = 1,9444827$$

$$\log. \text{sen. } BCA (51^\circ, 20') = 1,8925365$$

$$\text{comp. log. sen. } BAC (43^\circ, 40') = . . 10,1608604$$

$$\log. AB = 1,9978796$$

e quindi $AB = 99^m, 51$ per la distanza richiesta.

Espressione dell'area di un triangolo in funzione dei due lati e dell'angolo compreso.

Sia ABC (*fig. 273*) il triangolo. Detta S la sua area e tirata la sua altezza AO sappiamo dalla geometria che:

$$S = \frac{BC \times AO}{2}.$$

Ora $AC = a$ ed AO dal triangolo rettangolo BAO eguaglia $c \text{ sen. } B$, quindi:

$$S = \frac{ac \text{ sen. } B}{2}.$$

L'area di un triangolo eguaglia il prodotto di due lati per metà del seno dell'angolo che essi comprendono.

Avendosi, per esempio, $a = 12^m$, $c = 20^m$, $B = 30^\circ$, siccome $\text{sen. } 30^\circ = \frac{1}{2}$, ne verrà:

$$S = \frac{12 \times 20}{4} = 60^m.$$

In tesi generale S è calcolabile per logaritmi, avendosi:

$$\log. S = \log. a + \log. c + \log. \text{sen. } B + \text{comp. log. } 2 - 10.$$

ESEMPIO.

$$a = 18^m, 15, c = 33^m, 40, B = 48^\circ, 28'.$$

Calcolo di S :

$$\log. a = \dots\dots\dots 1,2588766$$

$$\log. c = \dots\dots\dots 1,5237465$$

$$\log. \text{sen. } B = \dots\dots\dots \overline{1},8712323$$

$$\text{comp. log. } 2 = \dots\dots\dots 9,6989700$$

$$\log. S = \dots\dots\dots 2,3558250$$

e quindi $S = 226^{\text{m}}, 89$ circa.



RACCOLTA DI PROBLEMI ED ESERCIZI

SUI QUATTRO PROGRAMMI SVILUPPATI

accompagnata dall' indicazione del risultato

ARITMETICA.

1.° In un paese esistono 4878 macchine a vapore della forza totale di 58536 cavalli. Qual' è la forza media di queste macchine?

Resultato. 12 cavalli.

2.° Una macchina a vapore consuma per forza di cavallo e per ora 6000 grammi di carbone; sapendo che ha lavorato otto giorni (giorno e notte) ed ha consumato 216 ettolitri al peso di 80000 grammi l'ettolitro trovarne la forza in cavalli.

Resultato. 15 cavalli.

3.° Il mare cuopre gli $\frac{11}{14}$ del globo terraqueo. La superficie dell'Asia è $\frac{121}{27}$ di quella dell'Europa, quella dell'Africa ne è $\frac{22}{7}$ quella dell'America è $\frac{111}{27}$ e quella dell'Oceania $\frac{21}{27}$. Supposto che la superficie dell'Africa sia di 2970000000 di ettari calcolare quella delle altre parti del mondo e dedurre quindi la superficie totale del globo.

Resultato.

Europa	ettari	945000000
Asia	•	4235000000
America	•	3885000000
Affrica	•	2970000000
Oceania.	•	735000000
Globo	•	$5959333333 \frac{1}{3}$

4.° Il lastrico di una città occupa una superficie di ettari $311 \frac{2}{7}$. Supposto uniforme e tale che 12 pietre occupino $\frac{2}{3}$ di metro quadro, quale sarà il numero delle pietre e il loro prezzo totale a ragione di $\frac{5}{11}$ di lira per ogni pietra? (l'ettaro è 10000 m. q.)

Resultato. Pietre . . . $56057142 \frac{6}{7}$
 Spese lire. $23357142 \frac{6}{7}$

5.° Un operaio lavorò nel primo trimestre dell'anno giorni $70 \frac{1}{2}$, nel secondo $56 \frac{2}{3}$, nel terzo $81 \frac{3}{4}$ e nel quarto $42 \frac{5}{6}$; il suo guadagno medio fu di lire $3 \frac{1}{4}$ al giorno e la sua spesa media di lire $2 \frac{7}{8}$. Quanti giorni lavorò nell'intiera annata? Quanto guadagnò? Quanto spese? Quanto economizzò?

Resultato.

Lavorò giorni $251 \frac{3}{4}$
 Guadagnò L. $818 \frac{3}{16}$
 Spese • $723 \frac{23}{32}$
 Economizzò • $94 \frac{13}{32}$

X 6.° Tizio possiede 280 lire. Compera dapprima m. $18 \frac{3}{4}$ di stoffa a $4 \frac{5}{6}$ al metro, consuma in un giorno il terzo di ciò che gli resta e nel secondo i $\frac{2}{3}$ del residuo. Con quanto rimane?

Resultato. Lire $75 \frac{3}{4}$.

X 7.° A possiede i $\frac{3}{4}$ di B che invece ha $2 \frac{1}{2}$ l'avere di C il quale a sua volta è possessore dei $\frac{5}{3}$ di ciò che ha D . Sapendosi che D ha 150 lire trovare gli averi di A , B , C .

Resultato.

<i>A</i>	possiede.	L. 1593 $\frac{3}{4}$
<i>B</i>	id.	2125
<i>C</i>	id.	850

X 8.° Sopra un patrimonio di L. 150000 deve darsi i $\frac{7}{16}$ al primogenito, $\frac{1}{4}$ al secondogenito, $\frac{1}{8}$ per ciascheduna a due figlie e il resto deve impiegarsi in opere di beneficenza. Fare il reparto del patrimonio.

Resultato. Toccheranno al primogenito L. 70000, al secondogenito 37500, ad ogni figlia 18750 ed in opere di beneficenza saranno spese lire 5000.

9.° Per vuotare un pozzo possono adoperarsi quattro trombe. La prima da sola lo vuoterebbe in ore 5 $\frac{1}{2}$, la seconda in 3 $\frac{7}{8}$, la terza in 4 $\frac{1}{12}$, la quarta in 6 $\frac{1}{6}$. La prima tromba estrae 297 $\frac{1}{2}$ litri per ora. Si domanda: 1.° Quanta acqua evvi nel pozzo. 2.° Quanti litri per ora estraggono le altre trombe. 3.° Quanto tempo si richiede alle 4 trombe lavoranti insieme onde vuotare l'intero pozzo.

Resultato. Il pozzo contiene litri 1634 $\frac{3}{5}$.

La 2.ª tromba estrae ogni ora	Litri	421	$\frac{129}{155}$
La 3.ª	id.	400	$\frac{76}{245}$
La 4.ª	id.	265	$\frac{13}{185}$

Occorrono alle 4 trombe ore $1 + \frac{70306375}{389040744}$ onde vuotare l'intero pozzo.

X 10.° Uno stabilimento che aveva in fondo chilog. 874 di piombo ne ha ricevuti in tre riprese una volta 57, 75 una seconda 87, 41 una terza 92, 1. Ne ha consumati 195, 71 per fondere dei proietti. Quanti glie ne rimangono ancora?

Resultato. Chilog. 915, 55.

X 11.° Un negoziante di coloniali ha comperato 1218 chilog. di caffè a L. 2, 80 il chilog. e 800 chilog. di zucchero a 1543.

Si domanda: 1.° di quanto il costo del caffè superi quello dello zucchero. 2.° Quanto guadagnerà il negoziante vendendo il caffè a 3,20 e lo zucchero a L. 2 il chilog.

Resultato. Il costo del caffè supera quello dello zucchero di L. 0,87125. Il guadagno totale è di L. 544,20.

12.° Determinare in chilog. il peso di un volume di metri cubi $88^{\text{mc}}, 54$ di rame sapendo che il rame a egual volume pesa 8,167 volte l'acqua.

Resultato. Chilog. 723106,18.

13.° Si domanda a meno di un milligrammo qual'è il peso di aria spostato da chilog. 1563 di rame supposto che questo metallo pesi 8,167 volte più dell'acqua e l'acqua 773 volte più dell'aria sotto lo stesso volume.

Resultato. Grammi 247,588.

14.° Quanti centimetri cubi sono in una massa d'oro che costa 703 lire sapendo che l'oro pesa a egual volume 19 volte più dell'acqua e vale a peso eguale 15,5 più dell'argento?

Resultato. Centimetri cubi $10 \frac{23}{31}$.

15.° Un proprietario possiede ettari 15,48 di terreno su cui semina 10 ettari a grano raccogliendo ettolitre 140, semina il rimanente a segala e raccoglie ettolitre 48. Possiede inoltre are 920 di altro terreno su cui semina per metà grano e segala lo che gli produce ettolitre 60 di grano e 42 di segala. Supposto di aver venduto il grano a lire 0,31 al litro e la segala a 0,14 determinare l'incasso fatto dal proprietario, ammesso che per le leggi di colonia gli pervenga la metà del raccolto.

Resultato. Lire 3730.

16.° Un proprietario ha quattro vigne nelle quali raccolse in tutto 500 ettolitre di vino. La prima ne ha dati 118 ettolitre e 7 decalitre, la seconda 97 decalitre e 2 centi-

litri, la terza 245 ettolitre e 9 litri. Determinare il prodotto della quarta.

Resultato. Litri 12659, 08.

17.° Supposto che sieno sufficienti all'alimento annuo di un uomo 3 ettolitre e litri 6 di grano del peso di chilogr. 8, 5 al litro, supposto che 7 chilogr. di grano ne diano 6 di farina e 100 di farina 125 di pane e ammesso che il pane costi 0, 60 al chilogr. quanto spenderanno di pane 6 uomini in un anno?

Resultato. Lire 10032 circa.

X 18.° Da un ettolitro di olive poste sotto la pressa si tolgono 34 litri di olio. Da quanti ettolitre di olive sono stati estratti litri 27218 di olio?

Resultato. Ettolitre 800,529 circa.

19.° Determinare il consumo annuo di pane di un uomo supposto che l'ettolitro del grano pesi 170 chilogr. che 14 chilogr. di grano ne diano 12 di farina, 100 di farina ne somministrino 120 di pane e che l'uomo consumi 360 litri di grano.

Resultato. Chilogr. $629\frac{17}{35}$ ovvero chilogr. 629,485 circa.

20.° Per trasportare il carbone mediante una strada ferrata si pagano lire 0, 097 per tonnellata e per chilometro. Si paga inoltre un diritto fisso di lire 2, 12 per vagone contenente ettolitre 3240. A quanto verrebbero ettolitre 28274, 50 comprati al prezzo di lire 2, 50 l'ettolitro e trasportati mediante la strada ferrata a miriam. 15, 60. L'ettolitro del carbone è supposto del peso di 84 chilogr.

Resultato. Lire 106343, 745656.

X 21.° Determinare a quanti ducati napoletani di 100 grani caduno corrispondono talenti 1803 di antica moneta romana sapendo che il ducato corrispondeva a lire 4, 25 e il talento a 6522 lire.

Resultato. Ducati 2765328.

22.° Ad elevare una traversa del volume di metri cubi 528,720 una compagnia di zappatori del genio impiegò 25 giorni. Quanto tempo gli occorrerebbe onde elevarne un'altra del volume di metri cubi 248,84.

Resultato. Giorni $11 \frac{10127}{13218}$.

✓ 23.° Si è speso lire 2847,75 onde pagare in una settimana 198 lavoranti. Quanto si spenderà onde pagarne 312?

Resultato. Lire 4487,36 circa.

✓ 24.° Onde comperare 218 metri di una stoffa alta 0,80 si sono spese lire 1800. Si domanda quanto dovrà spendersi onde acquistarne invece metri 304 di stoffa della stessa specie, ma alta 0,50?

Resultato. Lire 1568,80 circa.

25.° Un proprietario ha inalzato una fabbrica in 204 giorni mediante l'impiego di 48 lavoranti. Quanti lavoranti avrebbe dovuto impiegare onde costruirla in 100 giorni?

Resultato. $97 \frac{23}{25}$ vale a dire 98 uomini dei quali uno lavorasse meno degli altri e precisamente nel rapporto di 23 : 25.

26.° Il suolo della Francia può ragguagliarsi a ettari 1.57 per abitante ed è decomponibile nel modo seguente:

Produzione di alimenti	0,89
Boschi	0,40
Terre incolte	0,23
Costruzioni, strade e canali	0,04
Fiumi e laghi	0,01
	<hr/>
	1,57

Supposta la superficie totale della Francia di ettari 49863693 determinare il numero di ettari di terre incolte.

Resultato. Ettari $7304872 \frac{12}{157}$.

27.° Si domanda quante ore al giorno dovranno lavorare 80 uomini onde scavare 270 metri cubi di terra in 15 giorni, sapendosi che 30 uomini ne scavarono 160 in 25 giorni lavorando 6 ore del giorno.

Resultato. Ore $6 \frac{21}{64}$.

28.° Un capitale di lire italiane 2512 fu posto ad interesse semplice del 5 % e vi fu tenuto anni 3 e giorni 40. Si domanda quanto produsse?

Resultato. Lire 390,75 circa.

29.° Cinquantaquattro impiegati lavorando 5 ore del giorno hanno verificato in 32 giorni 270 registri di contabilità. Si domanda quanto tempo dovranno lavorare 80 impiegati a 6 ore del giorno onde verificare 520 registri?

Resultato. Giorni $34 \frac{2}{3}$.

30.° Si desidera sapere in quanto tempo i capitali impiegati ad interesse semplice del 6 $\frac{1}{4}$ p. % si triplicano?

Resultato. 32 anni.

31.° Una fattoria rendeva ordinariamente al netto L. 12850. Meglio amministrata la sua rendita crebbe del 4 $\frac{1}{2}$ per %. Supposto che l'interesse tassa dei beni fondi, si stabilisca al 3 $\frac{1}{2}$, si domanda il valore della fattoria.

Resultato. L. 383664,28.

32.° Una casa viene espropriata per pubblica utilità. Il proprietario ritraeva all'anno dal piano terreno lire 850, dal primo 1400 dal secondo 1400 e dal terzo lire 1200. La tassa fondiaria da pagarsi dal proprietario si valuta al 18 % sui tre quarti delle pigioni, e ciò che rimane costituisce il reddito netto. Si domanda quanto dovrà pagarsi l'espropriazione supponendo di capitalizzare il reddito netto al 6 % e quindi aumentare la somma ottenuta di $\frac{1}{5}$.

Resultato. L. 83904 circa.

33.° La profondità del pozzo di Grenelle è 505^m e la temperatura del fondo del pozzo 27°, 33. La temperatura delle cave dell'Osservatorio situate a 28^m al disotto del suolo essendo 1°, 7 calcolare la temperatura di uno strato situato ad una profondità di 217^m. Si ammetterà che l'accrescimento di temperatura sia proporzionale alla quantità per la quale si scende sotto al suolo?

Resultato. 11°, 85.

34.° Il capitale impiegato in una fabbrica è di 700000 lire di cui una metà rappresenta il *capitale fisso* (macchine e fabbriche) e l'altra metà il capitale mobile. Questa fabbrica produce annualmente 8575 tonnellate di ferro fuso che si vendono al prezzo di 125 lire la tonnellata. Il costo di 100 chilogrammi di ferro fuso si distribuisce nel modo seguente:

Minerale	L. 3, 00
Coke	• 4, 00
Mercede agli operai.	• 0, 30
Spese di amministrazione . . .	• 1, 40
	<hr/>
Totale	L. 8, 70

Si calcola inoltre di dover pagare il 10 per % di interesse sul capitale fisso e il 7 per % sul capitale mobile. Quale è il guadagno annuale?

Resultato. Lire 266350.

35.° Le spese necessarie per estrarre il rame da un quintale di minerale si elevano a lire 5, 75. Si compra una certa quantità di minerale che contiene 12 per % di rame al prezzo di 18 lire il quintale; il rame perduto nell'operazione elevandosi ai due centesimi di quello che contiene il minerale, quale sarà il prezzo del quintale del rame?

Resultato. Lire 201, 95 circa.

36.° Giuseppe, Enrico, Alberto ed Ernesto costituiscono una società per negoziare in generi di moda. A quest'oggetto Giuseppe pone lire 30000, Enrico 28000, Alberto 25000 ed Ernesto 20000. Con questo capitale si comprano mercanzie e si fa in capo all'anno un guadagno di lire 10000. Si tratta di fare il reparto degli utili fra i quattro soci, avvertendo che Alberto deve ricevere in più della quota lire 2500 a titolo di stipendio per aver prestata l'opera sua e che a Enrico invece devono esser ritenute lire 650 percepite in acconto alla fine del 9.° mese e deve anche essergli ritenuto l'interesse di questa somma in ragione del 7 per %, il quale interesse però non va soggetto a reparto, ma si versa in fondo di cassa per l'anno susseguente.

Resultato:

A Giuseppe spettano. . .	L. 2184, 46
A Enrico id. . .	• 1377, 46
A Alberto id. . .	• 4320, 38
A Ernesto id. . .	• 1456, 31.

37.° Si domanda quanto dovrà pagare un banchiere sopra una cambiale di lire 2500 scadente a 80 giorni data essendo lo sconto al 7 $\frac{1}{2}$ per %.

Resultato.

Lire 2458, 33.

38.° Tizio dà ad un banchiere una cambiale di lire 8000 scadente a tre mesi data onde riceverne una tratta sopra Parigi. Le condizioni dell'operazione sono: 1.° Lo sconto sarà del 6 per %. 2.° Il banchiere perciperà inoltre $\frac{1}{2}$ per % di commissione, valutato sull'intera somma di lire 8000. Il cambio fra la carta moneta italiana e l'oro che si ritira a Parigi verrà ragguagliato a 20, 90 di carta per 20 lire in oro. Qual somma riscuoterà in oro a Parigi?

Resultato.

Lire 7502, 39.

39.° Il consolidato francese 3 per % essendo quotato alla Borsa di Parigi a 71, 70 e l'inglese pure 3 per % a 93 $\frac{1}{2}$,

determinare la somma necessaria a comperare 500 lire di rendita francese e 400 di rendita inglese.

Resultato totale. Lire 24466, 66 circa.

40.° Il consolidato italiano 5 per % essendo a 56, 32 e sapendosi che sui cupons semestrali vien fatta la ritenuta dell' 8, 80 per %, determinare la quota effettiva a cui si situa il denaro comperando questo consolidato?

Resultato. $8 \frac{17}{176}$ per %.

41.° Le obbligazioni sui beni ecclesiastici nel Regno d'Italia furono emesse nel novembre 1869 a 77 effettivo corrispondente a 100 nominale e fruttano il 6 per % sul valor nominale. Supposto che in forza del rimborso esse acquistino ogni anno un aumento di prezzo di lire 2, determinare la tassa a cui fu impiegato il denaro col loro acquisto.

Resultato. 10, 39 circa.

42.° Un operaio può trasportare ogni giorno in una carretta 800 chilogrammi ad un chilometro. Il prezzo della giornata è di lire 2, 25. Si domanda quanto costeranno 500 metri cubi di terra trasportati a 97 metri sapendo che il metro cubo di terra pesa chilogrammi 1600.

Resultato. Lire 218, 25.

43.° Un cavallo può trascinare mediante un carro chilogrammi 1200, la sua velocità è di chilometri 4, 25 all'ora, il tempo richiesto per caricare e scaricare è di 10 minuti; il prezzo del carro col suo conduttore è di 5 lire al giorno e la durata del lavoro di 10 ore.

Si domanda quanto costeranno 500 metri cubi trasportati a 97^m di distanza, il metro cubo pesando 1600 chilogrammi.

Resultato. Lire 65 circa.

44.° Fallisce un negoziante e lascia con *A* un debito di lire 12000, con *B* un altro debito di lire 8000 e con *C* un debito di lire 7500. Vendute le sue mercanzie se ne ricavano

lire 9000. Si domanda: 1.° cosa percepirà in stralcio *A*, *B*, *C* in proporzione del proprio credito; 2.° a quanto per % si valuta la quota dei creditori.

Resultato.

Spettano a <i>A</i>	L. 3927, 27
" <i>B</i>	2618, 18
" <i>C</i>	2454, 55

I creditori riceverono lire 32, 72 per % circa.

45.° Quattro comuni debbono dare 300 soldati di contingente in ragione della loro popolazione. Il primo ha 28200 abitanti, il secondo 16450, il terzo 18222 e il quarto 8565. Si domanda di repartire il contingente colla maggiore esattezza possibile.

Resultato.

Il primo comune darà uomini	118
" secondo " "	69
" terzo " "	77
" quarto " "	36.

46.° Il bronzo da campane contiene 390 parti di rame, 110 di stagno, 5 di zinco e 4 di piombo. Qual peso di questi metalli dovrà impiegarsi onde fondere una campana di 5000 chilogrammi.

Resultato.

Rame.	Chilog. 3831, 041
Stagno	" 1080, 550
Zinco	" 49, 116
Piombo.	" 39, 293.

47.° Si ha del thè da lire 17, da lire 10 e da lire 12 il chilogrammo.

Si vuol fare un miscuglio che su 100 chilogr. contenga chilogr. 1,5 thè della terza qualità e possa vendersi senza perdita nè guadagno lire 15 al chilogrammo. In qual proporzione dovrà farsi il miscuglio?

Resultato. Sopra 100 chilogrammi di miscuglio dovranno entrarne chilogrammi 71 della prima qualità, 27,5 della seconda e 1,5 della terza.

48.° Estrarre a meno di un millesimo la radice quadrata dalla frazione $\frac{1}{11}$.

Resultato. 0,603.

49.° Calcolare a meno di un centesimo l'espressione:

$$\sqrt{\left(\frac{7 + \sqrt{5}}{2}\right)}.$$

Resultato. 2,15.

50.° Estrarre la radice cubica dalla frazione $\frac{1}{7}$ a meno di un centesimo.

Resultato. 0,75.

GEOMETRIA PIANA.¹

1.° Determinare a meno di un centimetro il lato del quadrato equivalente ad un rettangolo di 2^m, 75 di base e 1^m, 13 di altezza.

Resultato. 1^m, 762.

2.° Calcolare la base di un triangolo equivalente ad un quadrato di 4, 15 di lato sapendo che detta base è $1 \frac{1}{2}$ volte la sua altezza.

Resultato. 7, 188 a meno di un mill.

3.° Si ha un rettangolo di 5^m di base su 3, 50 di altezza ed un quadrato di 3, 50 di lato. Determinare le basi parallele di un trapezio della stessa altezza delle indicate figure e tale che la sua superficie sommata con quella del quadrato eguagliino quella del rettangolo. La base maggiore deve esser doppia dell'altra.

Resultato. Base minore 1^m, base maggiore 2^m.

4.° In un triangolo i lati sono di 4^m, 15, di 7^m, 85 e 9^m, 38. Determinare a meno di un centimetro i sei segmenti tagliati dalle bisettrici dei suoi angoli sui lati opposti.

Resultato. Sul lato di 4^m, 15. . . $\left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{m}}, 89 \\ 2^{\text{m}}, 26. \end{array} \right.$
 Sul lato di 7^m, 85. . . $\left\{ \begin{array}{l} 2^{\text{m}}, 40 \\ 5^{\text{m}}, 45. \end{array} \right.$
 Sul lato di 9^m, 38. . . $\left\{ \begin{array}{l} 3^{\text{m}}, 24 \\ 6^{\text{m}}, 14. \end{array} \right.$

5.° In un triangolo rettangolo avente 3^m, 4^m, e 5^m di lati calcolare: 1.° la perpendicolare abbassata dal vertice dell'an-

¹ In una parte dei problemi di geometria, algebra e trigonometria fu omissso il risultato onde obbligare gli studiosi a contar solo sulla propria intelligenza onde verificare le soluzioni ottenute.

golo retto sull'ipotenusa; 2.° i due seguenti in cui essa divide l'ipotenusa; 3.° la distanza dal vertice dell'angolo retto al mezzo dell'ipotenusa; 4.° le aree dei due triangoli in cui è scompartito il triangolo dato.

Resultato. Perpendicolare 2^m, 40.

Segmenti dell'ipotenusa $\left\{ \begin{array}{l} 1, 80. \\ 3, 20. \end{array} \right.$

Retta che va dal vertice dell'angolo retto al mezzo dell'ipotenusa. . 2, 50.

Superf. dei triang. parz. $\left\{ \begin{array}{l} 2, 16. \\ 3, 84. \end{array} \right.$

6.° Determinare i due lati di un rettangolo in modo che la sua superficie stia a quella di un quadrato di 4^m di lato come 3 : 2 e che la sua diagonale stia a quella del quadrato come 5 : 4.

Resultato. I lati sono $4\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$.

7.° Sapendo che la diagonale minore di una losanga è $\frac{4}{5}$ della maggiore e che l'area della figura è 56^{m²}, 25 determinarne il lato a meno di 1 cent.

Resultato. Il lato è M.^l 7, 59.

8.° Costruire una losanga equivalente ad un quadrato di 4^m di lato per modo che la diagonale minore sia la metà della maggiore, vale a dire trovare il lato di questa losanga a meno di 1 centimetro.

Resultato. Il lato è $\sqrt{20} = 4^m, 47.$

9.° Il rapporto di similitudine di due triangoli è $\frac{7}{3}$ l'area del minore essendo 21^{m²}, 60 quale sarà l'altra?

Resultato. 117^{m²}, 60.

10.° A che altezza deve tagliarsi un triangolo isoscele di 16^m di base con 8 di altezza con una parallela alla base onde dividerlo in due parti equivalenti?

Resultato. Distanza del vertice $\sqrt{32} = 5^m, 65$ circa.

11.° L'area di un triangolo ottusangolo è 15^{mq}. I due lati che comprendono l'angolo ottuso son rispettivamente di 7^m e 3^m, 50. Determinare le porzioni o prolungamenti di questi lati compresi fra il vertice dell'angolo ottuso e le perpendicolari abbassate dai vertici opposti.

Resultato. Sul lato di 7^m . . . $\frac{1}{14} \sqrt{501}$.

Sul lato di 3^m 50 . . $\frac{1}{7} \sqrt{501}$.

12.° In un triangolo equilatero di 18^{mq} di superficie determinare il lato a meno di 1 centimetro.

Resultato. 6^m, 44.

13.° Determinare a meno di 1 centimetro la diagonale di un trapezio isoscele avente per base maggiore 4^m, 20 per base minore 2^m e per altezza 1^m, 80.

Resultato. 3^m, 58.

14.° In un triangolo equilatero di 5^m di lato si unisce un vertice con un punto del lato opposto posto a 2^m di distanza da un altro vertice. Determinare le due aree nelle quali fu scompartito il triangolo equilatero.

Resultato. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

15.° In un triangolo equilatero ABC (*fig. 274*) si prende un punto S sull'altezza AO a $\frac{2}{3}$ di detta altezza contati dal vertice A , indi si abbassano le perpendicolari SD , SE sui lati AB , AC . Determinare la superficie dell'area $SDAE$ in funzione del lato del triangolo.

Resultato.

Detto a il lato la superficie richiesta è $\frac{a^2 \sqrt{3}}{12}$.

16.° La base di un triangolo isoscele essendo $3^m, 70$ e l'area 20^{mq} calcolarne il perimetro a meno di 1 centimetro.

17.° Prese sulla retta AC (*fig. 275*) le lunghezze AB, BC eguali rispettivamente a $6^m, 4^m$ si costruiscano i due triangoli equilateri ABE, BCF indi si tiri FE prolungandola fino in G ; calcolare a meno di 1 centimetro quadrato le aree BEF, FCG, AEG .

Resultato. Area $BEF = 10^{mq}, 3923$,
Id. $FCG = 13^{mq}, 8563$,
Id. $AEG = 46^{mq}, 7652$.

18.° Calcolare l'area del pentagono $ABCDE$ (*fig. 276*) sapendo che i suoi lati sono $AB = 3^m, BC = 3^m, 50, CD = 1^m, 80, DE = 4^m, 20, EA = 3^m, 50$ e le diagonali AC, AD sono $AC = 5^m, 00, AD = 5^m, 20$.

19.° Ridurre in gradi sessagesimali gradi centesimali $48^\circ, 91', 80''$.

Resultato. $44^\circ, 1' 34'', \frac{8}{25}$.

20.° Nel circolo O si è condotto dal punto esterno A la secante ABC e si è trovato $AB = 3^m, 50, AC = 6^m, 40$. Determinare la lunghezza della tangente AT tirata dal punto A (*fig. 277*).

Resultato. $4^m, 73$ a meno di un centimetro.

21.° Ridurre in gradi centesimali gradi sessagesimali $18^\circ, 25'$.

Resultato. Gradi $20', 46', 29'' \frac{17}{27}$.

22.° Nel circolo O (*fig. 277*) si prendono a partire dal punto B gli archi $BC = 87^\circ, 15' 40'', BE = 42^\circ, 25' BF = 88^\circ, 44' 10''$, si tirano quindi BF e CE . Determinare di quanti gradi risulta l'angolo CVF .

Resultato. $113^\circ, 12', 35''$.

23.° Nel circolo O (*fig. 278*) si tirano le due tangenti AT , AT' che formano fra loro un angolo di 120° indi si prende l'arco $TB = 115^\circ, 47'$ e si tira BT' . Determinare l'angolo $BT'V$.

Resultato. $BT'V = 62^\circ, 6', 30''$.

24.° Data una retta AB di lunghezza a , determinare sul suo prolungamento un punto C tale che BC sia media proporzionale fra AC e AB . (*Fig. 279*).

Il punto C chiamasi *coniugato* di quello D che divide la AB in media ed estrema ragione.

Resultato. $CB = \frac{a + \sqrt{5}}{2},$

$$CA = \frac{3a + \sqrt{5}}{2}.$$

25.° Sono circoli ex-inscritti ad un triangolo quelli che son tangenti ad un lato e ai prolungamenti degli altri due. Ciò posto determinarne i raggi in funzione dei lati del triangolo:

Resultato. $r' = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$

$$r'' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},$$

$$r''' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

26.° Il raggio del circolo inscritto in un triangolo è di 1^m ; l'area del triangolo di 12^{mq} e uno dei lati di 3^m . Determinare gli altri due lati a meno di un centimetro.

27.° Data una diagonale D e la superficie S di una losanga trovarne il lato.

Resultato. $L = \frac{\sqrt{D^2 + 4S^2}}{2D}.$

28.° Data la diagonale D e la superficie S di un rettangolo determinarne i lati.

Resultato.

$$\text{Lato maggiore } \frac{\sqrt{D^2 + 2S} + \sqrt{D^2 - 2S}}{2},$$

$$\text{lato minore } \frac{\sqrt{D^2 + 2S} - \sqrt{D^2 - 2S}}{2}.$$

29.° Si ha un terreno rettangolare lungo 27^m e largo 18^m, 50 e lo si vende per fabbricare al prezzo di lire 4, 20 al metro quadro. Se non che invece di denaro si riceve del terreno coltivo valutato a 0, 82 il metro quadro. Quante are di questo terreno si dovranno avere?

Resultato. Are 25, 5853 circa.

30.° Determinare i quattro lati di un trapezio isoscele circoscritto ad un circolo, sapendo che il circolo ha 2^m di raggio e che la superficie del trapezio è 25^{m²}.

Resultato. Lati non paralleli ognuno è di metri 6, 25.

Base maggiore 11^m, 05

• minore 1, 45.

31.° Due lati di un triangolo sono 4^m e 4^m, 80; il raggio del circolo circoscritto è di 3^m. Determinare il terzo lato.

Resultato. 5^m, 97 circa.

32.° Il lato di un triangolo equilatero inscritto in un circolo essendo 3^m, determinare a meno di un centimetro il diametro del circolo.

Resultato. 3^m, 46.

33.° Il lato del decagono regolare inscritto nel circolo essendo 4^m, determinare quello del triangolo equilatero pure inscritto.

34.° Determinare il lato dell'ottagono regolare inscritto in funzione del raggio.

Resultato. $L = R \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

35.° Determinare l'area del dodecagono regolare inscritto in funzione del raggio.

Resultato. $3 R^2$.

36.° Trovare l'area dell'ottagono regolare circoscritto ad un circolo in funzione del raggio del circolo.

37.° Si è circoscritto ad un circolo un trapezio isoscele nel quale i lati non paralleli fanno fra loro un angolo di 120°. Trovarne l'area in funzione del raggio del circolo.

Resultato. $8 R^2$.

38.° Si è inscritto in un circolo un trapezio isoscele nel quale i lati non paralleli fanno fra loro un angolo di 120°. Determinarne l'area in funzione del raggio del circolo.

Resultato. $\frac{1}{4} R^2$.

39.° Il lato di un pentagono regolare essendo 3^m determinarne la superficie a meno di un centimetro quadro.

40.° Si è comperato un terreno di forma esagona regolare di lato 18^m, 25 a ragione di lire 1, 25 al metro quadro. Quale ne sarà il prezzo?

41.° Una ruota di una vettura il cui diametro è 1^m, 75 fa 2000 giri. Quale sarà il cammino percorso dalla vettura?

Resultato. Metri 10995 circa.

42.° Un terreno circolare ha la superficie di 100^{m²}. Quale ne sarà il raggio?

Resultato. 5^m, 64.

43.° Trovare la superficie di un settore circolare di 32°, 20' nel circolo di raggio 2^m.

Resultato. 1^{m²}, 13.

44.° Qual'è la superficie del segmento che ha per corda il raggio nel circolo di raggio 3^m.

45.° Trovare l'area del segmento corrispondente ad un arco di 36° gradi esprimendola in funzione del raggio.

$$\text{Resultato. } \frac{\pi R^2}{10} - \frac{R^2}{16} (\sqrt{5} - 1) \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right).$$

46.° Determinare a meno di 1 centimetro il raggio di un circolo concentrico ad un altro di raggio 5^m e tale che lo divida in due parti equivalenti.

Resultato. Questo raggio è 3^m, 53.

47.° Nel circolo O si tirano dalla stessa parte del centro le due corde parallele AB , CD eguali la prima al raggio, la seconda al lato del triangolo equilatero inscritto; indi si conducono le rette CA , DB prolungandole fino al loro incontro in E . Si vuol calcolare in funzione del raggio 1°: l'area del triangolo ABE . 2°: quella del trapezio $ABCD$. (*fig. 280*).

$$\begin{aligned} \text{Resultato.} \quad \text{Area } ABE &= \frac{R^2}{4} \\ \text{area } ABCD &= \frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

48.° Determinare approssimativamente in funzione del raggio la differenza che corre dalla somma dei lati del quadrato e del triangolo equilatero inscritto alla semi-circonferenza del circolo stesso.

Resultato. 0,0047 R circa.

49.° Determinare a meno di 1 centimetro il raggio di un circolo tale che il perimetro del quadrato inscrittovi eguali quello del triangolo equilatero circoscritto al circolo di raggio 4^m.

Resultato. Questo raggio è 7^m, 34.

50.° Determinare quanti gradi, minuti e secondi debba avere un settore nel circolo di raggio 3^m onde risultare equivalente ad un rettangolo lungo 5^m e alto 2^m.

Resultato. Il settore sarà di gradi 127°, 23', 18" circa.

51.° Divisa la conferenza di circolo O in 6 parti eguali AB, BC, CD, DE, EF, FA si tirino le rette AC, CE, EA, BD, DF, FB . Calcolare il perimetro e l'area del poligono stellato $Aa Bb Cc Dd Ee FfA$ (*fig. 281*) sapendo che il raggio del circolo è espresso da $\sqrt{6}$.

Resultato. Perimetro $12\sqrt{2}$,
area. . . . $6\sqrt{3}$.

52.° Determinare qual'è il raggio di un circolo concentrico ad un altro di raggio R e tale che lo divida per guisa che il nuovo circolo sia mediò proporzionale fra il primitivo e la corona circolare interposta fra i medesimi.

Resultato. $\frac{R}{2} \sqrt{2\sqrt{5}-2}$.

53.° Determinare le dimensioni di un rettangolo tale che il suo perimetro eguagli quello di un circolo di raggio 4^m e abbia un'area equivalente all'ottava parte di quella del circolo.

Resultato. Base . . $2\pi + \sqrt{4\pi^2 - 2\pi}$
altezza. $2\pi - \sqrt{4\pi^2 - 2\pi}$

54.° Sulla bisettrice AO di un angolo BAC di 60° si prenda la lunghezza $AO = 10^m$, indi con centro in O e raggio eguale alla perpendicolare OB abbassata sopra uno dei lati dell'angolo si descriva l'arco di circolo BEC che risulta tangente ai detti lati. Determinare a meno di un centimetro quadro la superficie mistilinea $BACE$ (*fig. 282*).

55.° Sul diametro AB lungo 3^m del circolo O si prenda la parte AC di $1^m, 25$, indi (*fig. 283*) si descrivano sopra AC e BC considerate quali diametro le mezze circonferenze AMC, CNB . Determinare a meno di un centimetro quadro l'area $AMCNB$.

56.° Si hanno due circoli concentrici uno di raggio $3^m, 5$ l'altro di 5^m . Determinare a meno di 1 centimetro la lun-

ghezza della corda del circolo maggiore che risulta tangente all'altro.

Resultato.

7^m, 14.

57.° Una lastra circolare di 0^m, 75 di raggio fu ricoperta di uno strato di argento uniforme e a quest'uopo si spesero lire 212. Determinare il peso di argento che fu impiegato in ogni decimetro quadro.

58.° Supposta la terra perfettamente sferica e di raggio eguale a quello del suo meridiano valutare questo raggio a meno di 1^m.

59.° Sulla circonferenza del circolo O si prendano (*fig. 28 f*) gli archi AB , BC eguali il primo a 90° , il secondo a 60° , si tiri quindi la corda AD che passa per A e per il punto di mezzo della BC . Supposto il raggio del circolo di 1^m determinare questa corda a meno di 1 millimetro.

60.° Trovare il lato del pentadecagono regolare in funzione del raggio.

Resultato.

$$\frac{R}{4} \left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3} [\sqrt{5} - 1] \right].$$

GEOMETRIA SOLIDA.

1.° La lunghezza di un' obliqua compresa fra il suo piede in un piano ed un altro dei suoi punti essendo di 3^m,25 e l' inclinazione dell' obliqua al piano di 45° calcolare a meno di 1 centimetro la proiezione dell' obliqua.

Resultato. 2^m, 30.

2.° Si hanno tre piani paralleli; il primo dista 2^m dal secondo, il secondo 2^m,50 dal terzo. Una retta incontra i tre piani e la sua lunghezza compresa fra il primo e il terzo piano è di 6^m. Calcolare i segmenti compresi fra il primo e il secondo piano, non che fra il secondo e il terzo.

Resultato. 1.° Segmento 2^m, 67 circa
2.° id. 3^m, 33

3.° Calcolare a meno di 1 centimetro gli spigoli di un parallelepipedo rettangolo sapendo che stanno fra loro come i numeri 2, 3, 4 e che la diagonale del solido è di 5^m.

Resultato. Gli spigoli sono di 1^m, 85, 2^m, 77 e 3^m, 70.

4.° Calcolare a meno di un centimetro cubo il volume di un parallelepipedo avente per base una losanga in cui l' angolo acuto è di 60° ed il cui lato è 3^m e nel quale l' altezza è 4^m, 20.

Resultato. Metri cubi 32, 735745.

5.° Calcolare a meno di 1 decimetro cubo il volume di un prisma retto avente per base un' esagono regolare di lato 2^m, 28, sapendo che l' altezza del prisma è di 3^m, 15.

Resultato. 42^m, 446.

6.° Un prisma retto ha per base un triangolo equilatero di 2^m, 40 di lato e per altezza 5^m, 10. Determinarne: 1.° la superficie laterale a meno di un centimetro quadro; 2.° la

superficie totale con la stessa condizione; 3.° il volume a meno di 1 decimetro cubo.

Resultato.

Superficie laterale . . . 36^{mq} , 7200

id. totale 41^{mq} , 7081

volume 12^{mc} , 719

7.° Un prisma retto ha per base un triangolo isoscele di 2^{m} di base e in cui gli altri due lati sono ciascuno $1^{\text{m}}, 5$; il volume del solido è 12^{mc} . Calcolarne l'altezza a meno di 1 centimetro.

8.° Determinare il lato di un cubo equivalente a un prisma retto avente per base un decagono regolare di 3^{m} di lato e per altezza 4^{m} .

Resultato.

$5^{\text{m}}, 2$ circa.

9.° Qual'è la superficie laterale di un prisma pentagono retto avente $2^{\text{m}}, 50$ di altezza e per base un pentagono regolare inscritto in un circolo di raggio 2^{m} ?

Resultato.

42^{mq} , 5525.

10.° Un prisma retto è del volume di 1^{mc} , la sua base è un triangolo equilatero; l'altezza del solido essendo $0^{\text{m}}, 80$, calcolare a meno di 1 centimetro il lato della base.

11.° Una piramide regolare a base quadrata ha $3^{\text{m}}, 5$ di altezza e 2^{m} di lato di base. Calcolarne 1.° la superficie laterale; 2.° la superficie totale; 3.° il volume.

Resultato.

Superficie laterale . . . 14^{mq} , 56 circa

id. totale 18^{mq} , 56

volume 4^{mc} , 667 circa

12.° Qual'è lo spigolo di un tetraedro regolare il cui volume fosse di 2 metri cubi?

Resultato.

$2^{\text{m}}, 5$ circa.

13.° Si ha una piramide regolare avente per base un esagono regolare di 4^{m} di lato e in cui l'altezza è 6^{m} . Si taglia

con un piano parallelo alla base a 2^m, 50 di distanza dal vertice. Determinare 1.° a meno di un centimetro quadro la superficie laterale e totale del tronco che ne risulta; 2.° il suo volume a meno di 1 decimetro cubo.

14.° Un tronco di prisma retto a base triangolare equilatera di 2^m di lato ha il volume di 2^m. I suoi spigoli stanno fra loro come i numeri 3, 4 e 5. Calcolargli a meno di 1 centimetro.

Resultato. Gli spigoli sono di 0^m, 87, 1^m, 16 e 1^m, 45.

15.° Si ha un prisma retto di base quadrata a lato 2^m, 50. Su tre dei suoi spigoli si prendono le altezze di 1^m, 1^m, 25 e 1^m, 85 e per i tre punti così determinati si fa passare un piano. Trovare a meno di un decimetro cubo il volume del tronco di prisma che ne risulta.

16.° Determinare lo spigolo di un tetraedro regolare che ha la stessa superficie totale di un parallelepipedo rettangolo lungo 3^m, 25 e largo 2^m, 80 e alto 1^m, 15.

Resultato. 4^m, 30 circa.

17.° Un tronco di prisma triangolare retto ha per base un triangolo i cui lati son rispettivamente di 2^m, 3^m, 4^m; la sua sezione superiore è un triangolo equilatero. Trovarne il lato e trovare le altezze dei vertici sapendo che uno di essi è precisamente di quelli situati sullo spigolo verticale di uno degli estremi del lato di 2^m è all'altezza di 5^m sul piano della base.

Resultato. Le altezze dei due vertici sono :

$$5 - \sqrt{\frac{\sqrt{436} + 2}{3}},$$

$$\frac{\sqrt{109} + 19}{\sqrt{\frac{2 + \sqrt{436}}{3}}} - 5.$$

Il lato del triangolo risulta :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{436} + 29}{3}}.$$

18.° Una piramide triangolare regolare ha il lato della base di 4^m e l'altezza di 7^m, 25. Determinare a che distanza dal vertice debbasi tagliare con un piano parallelo alla base onde il volume della piccola piramide recisa sia la metà di quello del tronco.

19.° Tagliare la stessa piramide in guisa che la superficie totale della piccola piramide eguagli quella del tronco rimanente.

20.° Determinare il volume di una traversa di terra lunga 23^m larga 6^m alla base e alta 2^m, 50 supposto che le sue scarpe abbiano l'inclinazione di 45.° sul terreno naturale su cui essa si eleva.

Resultato. Metri c. 174, 832 circa.

21.° Determinare a meno di un centimetro le dimensioni dell'ettolitro cilindrico che ha il raggio di base eguale all'altezza.

Resultato. Raggio di base 0^m, 31
 altezza 0^m, 31.

22.° Trovare a meno di un millimetro le dimensioni di un litro tronco-conico supposto che il suo raggio di base superiore sia la metà di quello inferiore e che la sua altezza eguagli quest'ultimo raggio.

23.° Si domanda qual lunghezza debba darsi ad un tubo metallico del diametro di 25 centimetri onde possa contenere 18 litri di acqua.

Resultato. 0^m, 366.

24.° Determinare a meno di un centimetro le dimensioni di un cilindro equilatero la cui superficie laterale è di 16^{m²}.

Resultato. Raggio di base $1^m, 12$
 altezza $2^m, 24$.

25.° Determinare a meno di un centimetro le dimensioni di un cono circolare retto sapendo che la sua superficie convessa è 3^m e che il suo raggio di base è la metà dell'altezza.

Resultato. Raggio di base metri 0,65
 altezza 1,30
 apotema 1,46.

26.° Determinare a meno di un centimetro le dimensioni di un cono equilatero di cui la superficie totale è 4^m .

27.° Si ha un cono circolare retto di 0,45 di raggio di base e 0,30 di altezza. Tagliandolo con un piano parallelo alla base a 0,10 di distanza dal vertice, quale sarà la superficie totale del tronco che ne risulta?

28.° Riprendendo il cono dell'esempio precedente e volendone sviluppare la superficie convessa in un piano per modo da convertirla in altra equivalente della forma di un settore circolare di $1^m, 50$ di raggio, qual sarà il numero di gradi di detto settore?

Resultato. $77^\circ, 45' 36''$.

29.° Determinare a meno di un centimetro lo spigolo di un cubo che ha la stessa superficie totale di un cilindro di 2^m di altezza e $1^m, 15$ di raggio di base.

Resultato. $1^m, 94$.

30.° Calcolare a meno di un centimetro lo spigolo di un cubo equivalente in volume ad un cono equilatero di $2^m, 5$ di lato.

Resultato. $1^m, 52$ circa.

31.° Determinare le dimensioni di un cilindro equivalente ad un cono di $0^m, 80$ di raggio di base e di 2^m di altezza in guisa che la superficie convessa del cono stia a quella del cilindro come 2 : 5.

Resultato.

raggio di base del cilindro. . . 1,24 circa
 altezza. 0,28

32.° Il diametro di una sfera essendo di 1^m,25 determinare a meno di un decimetro cubo il volume dell'emisfero.

Resultato. 0^{mc}, 511.

33.° Trovare a meno di un centimetro il raggio di una sfera che ha per superficie totale 12^{mq}.

Resultato. 0^m, 98 circa.

34.° Trovare il lato del cono equilatero equivalente alla sfera di raggio R .

Resultato. $L = R \sqrt[3]{\frac{32}{\sqrt{3}}}$.

35.° Un cilindro avendo 2^m di raggio di base e 3^m di altezza, trattasi di determinare il raggio di una sfera che ne abbia la stessa superficie totale.

Resultato. $R = \sqrt{5} = 2,23$ circa.

36.° Il peso specifico dell'oro essendo 19 si tratta di determinare il peso di una palla sferica di quel metallo del diametro di 35 centimetri.

Resultato. chil. 426,320.

36.° Determinare le dimensioni di un tronco di cono circolare retto per guisa: 1.° che il raggio della base minore sia i $\frac{2}{3}$ di quello dell'altra base; 2.° che la sua altezza sia media proporzionale fra i raggi delle due basi; 3.° che il suo volume stia a quello della sfera di raggio 1^m come 6 : 7.

Resultato.

Raggio minore $\sqrt[3]{\frac{96}{133}} \sqrt{\frac{2}{3}},$

Raggio maggiore $\sqrt{\frac{324}{133}} \sqrt{\frac{2}{3}},$

Id. altezza $\sqrt[3]{\frac{144}{133}}.$

37.° Riprendendo il tronco di cono del precedente problema calcolare a meno di un centimetro l'altezza dal cono da cui fu tagliato.

Resultato. $3^m, 06.$

38.° Determinare la superficie a meno di un centimetro quadro della zona di $0^m, 25$ di altezza nella sfera di raggio 2^m .

Resultato. $3^{mq}, 1416.$

39.° Determinare la superficie del fuso di 30° nella sfera di raggio $1^m, 25$.

Resultato. $1^{mq}, 6354.$

40.° Nella sfera di raggio $1^m, 10$ un fuso ha la superficie di 8^{mq} . Quale è il suo angolo?

Resultato. $189^\circ, 30', 12'$ circa.

41.° Una zona sferica avendo l'altezza di $0^m, 60$ e la superficie di 4^{mq} , calcolare a meno di un centimetro il diametro della sfera?

42.° Nella sfera di raggio $1^m, 15$ un triangolo sferico ha i tre angoli rispettivamente di $27^\circ, 85^\circ$ e $117^\circ, 25'$. Quale sarà la sua superficie a mano di un decimetro quadrato?

Resultato. $1^{mq}, 14.$

43.° Determinare gli angoli di un triangolo sferico sapendo che essi stanno fra loro come i numeri 4, 6 e 7 e che questo triangolo è eguale al quarto del triangolo trirettangolo della medesima sfera.

Resultato. $A = \frac{9}{17} R^\circ = 47^\circ, 38', 49'' \text{ circa,}$

$B = \frac{27}{34} R^\circ = 71^\circ, 28', 14'' \text{ circa,}$

$C = \frac{63}{68} R^\circ = 83^\circ, 22', 56'' \text{ circa.}$

44.° Una sfera avente 1^m di raggio deve esser tagliata da un piano per modo che la sua superficie sia divisa in media ed estrema ragione. Quanto distarà questo piano dal centro?

Resultato. $\sqrt{5} - 2.$

45.° Un mezzo esagono regolare inscritto in un semi-circolo di raggio R ruota intorno al diametro di questo semi-circolo. Determinare l'espressione della superficie da esso generata e trovarne il rapporto con quella della superficie della sfera generata dal semi-circolo.

Resultato. superficie $2 \pi R^2 \sqrt{3}$
 rapporto $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

46.° Un mezzo esagono regolare circoscritto ad un semi-cerchio di raggio R ruota attorno al diametro di questo cerchio. Determinare l'espressione della superficie da esso generata e trovarne il rapporto con quella della sfera generata dal semi-circolo. (Paragonando questo problema al precedente dedurre che la superficie sferica è media proporzionale fra quelle generate dai due semi-poligoni).

Resultato. superficie $\frac{8 \pi R^2}{\sqrt{3}},$
 rapporto $\frac{2}{\sqrt{3}}.$

47.° Il triangolo isoscele ABC (*fig. 285*) di 18^m di base e 12^m di altezza ruota intorno alla base AB . Essendo tirata nel triangolo la parallela DE a questa base a metà dell'altezza determinare il volume generato dal triangolo CDE .

Resultato. $432 \pi = 1357^{\text{mc}}, 171.$

48.° Determinare l'angolo dei meridiani di Londra e di Parigi sapendo che il fuso terrestre che formano è eguale a 3367 miriametri quadrati.

49.° Calcolare il volume di un segmento sferico a due basi nella sfera di raggio 1^m, 20 sapendo che il raggio della sua base maggiore è 0,80 e quello dell'altra 0^m, 60.

Resultato. 0,221234 circa.

50.° Dato un segmento sferico ad una base dell'altezza di 0^m, 60 nella sfera di raggio 1^m, determinare l'altezza di un cono circolare retto equivalente al segmento e costruito sulla medesima base.

Resultato. 1^m, 027 circa.

51.° Una losanga di 3^m di lato e nella quale la diagonale maggiore è doppia dell'altra ruota intorno a questa diagonale minore insieme col circolo inscritto. Determinare a meno di un decimetro cubo: 1.° il volume del solido generato dalla losanga; 2.° quello della sfera generata dal semicerchio inscritto; 3.° determinare il rapporto che corre fra i due volumi.

Resultato.

volume prodotto dalla losanga 20,214

 della sfera 7,234

rapporto dei due volumi $\frac{5\sqrt{5}}{4}$.

52.° Inscrivere in un cono retto di altezza A e di raggio di base R un cilindro la cui superficie laterale sia S .

Resultato. Raggio di base del cilindro è:

$$\frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi R^3 A - 2 R S}{4 \pi A}},$$

altezza :

$$\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi A^3 R - 2 A S}{4 \pi R}}.$$

53.° Inscrivere in un cono retto di 2^m di altezza e 1^m di raggio di base un cilindro la cui superficie totale sia 5^{m²}.

54.° In una sfera di raggio R vuolsi inscrivere un cilindro la cui superficie laterale sia S . Quali saranno le dimensioni del cilindro?

Resultato.

$$\begin{aligned} \text{raggio di base} & \sqrt{\frac{R^2}{2} \pm \sqrt{\frac{R^4}{4} - \frac{S^2}{16\pi^2}}}, \\ \text{altezza} & \dots 2 \sqrt{\frac{R^2}{2} \mp \sqrt{\frac{R^4}{4} - \frac{S^2}{16\pi^2}}}. \end{aligned}$$

55.° Trovare a meno di un centimetro i valori delle precedenti dimensioni nell'ipotesi che il raggio della sfera sia 1^m e la superficie S di 6^{mq} .

$$\begin{aligned} \text{Resultato.} \quad \text{raggio di base} & \dots \left\{ \begin{array}{l} 0,80 \\ 0,59 \end{array} \right. \\ \text{altezza} & \dots \left\{ \begin{array}{l} 1,18 \\ 1,60. \end{array} \right. \end{aligned}$$

56.° Un segmento sferico a due basi è dell'altezza di $2^m, 5$ nella sfera di raggio 3^m . La base maggiore ha il raggio stesso della sfera. Quale dovrà essere il raggio dell'altra base ed il volume del segmento?

57.° Un quadrato ruota attorno alla sua diagonale insieme col circolo ad esso circoscritto. Determinare il rapporto fra i volumi generati dal semi-quadrato e dal semi-cerchio.

$$\text{Resultato.} \quad 1 : 2.$$

58.° Trovare la superficie generata dal semi-dodecagono regolare di lato L che ruota attorno al diametro del circolo circoscritto.

59.° Trovare il volume generato dal semi-ottagono regolare di lato L che ruota attorno al diametro del circolo circoscritto.

60.° Calcolare i raggi delle basi di un tronco di cono circolare retto inscritto in una sfera data di raggio 1^m , sapendo che il volume del cono troncato è 10^{mo} e l'altezza del cono è $10^m, 5$.

ALGEBRA.

§ 1.

1.° Calcolare il valore numerico del polinomio seguente:

$$x^3 + 5x^2 + 7x - 6, \text{ per } x = 3.$$

Resultato. 87.

2.° Calcolare il valore numerico del polinomio.

$$ax^3 + bx^2 - a^2x + b^2x - abx + a^3 - 3a^2b + b^3,$$

per $a = 3, b = 4, x = 5$.

Resultato. 133.

3.° Semplificare il polinomio :

$$\begin{aligned} &16a - 5b + 10c - 9d + 3a + 18b - 5c, \\ &- 7d + 3e - 7a - 2b - 3d + 5e, \\ &- 9f + 11a - 3b + 2c + 8d + 7f. \end{aligned}$$

Resultato. $23a + 8b + 7c - 11d + 8e - 2f$.

4.° Sommare i polinomi seguenti riducendo la somma:

$$\begin{aligned} &4a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 9b^3 \\ &- 2a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - 4b^3 \\ &6a^3 - 10a^2b + 8ab^2 + 10b^3 \\ &- 3a^3 - 8a^2b + 5ab^2 - 8b^3 \end{aligned}$$

Resultato. $5a^3 - 19a^2b + 18ab^2 - 11b^3$.

5.° Sommare i seguenti polinomi riducendo il risultato:

$$\begin{aligned} &5a^4 + 3a^2b^2c - 7ab^4 \\ &- 6a^4 + 2a^2b^2c + 17ab^4 \\ &+ 9a^4 - 8a^2b^2c - 10ab^4 \\ &+ 3a^4 - 5a^2b^2c - 7ab^4 \end{aligned}$$

Resultato. $11a^4 - 8a^2b^2c - 7ab^4$.

6.° Trovare il residuo della sottrazione algebrica:

$$[12a - b + 9c - 3d] - [7a - 5b + 9c - 10d + 12].$$

Resultato. $5a + 4b + 7d - 12.$

7.° Trovare il residuo della sottrazione algebrica:

$$15a^4 - 18a^3b + 17a^2b^2 + 11ab^3 - 9b^4 \\ - [7a^4 - 13a^3b - 19a^2b^2 + 20ab^3 - 10b^4].$$

Resultato. $8a^4 - 5a^3b + 36a^2b^2 - 9ab^3 + b^4.$

8.° Si fanno quattro compre: la seconda costa a franchi più della prima, la terza b franchi più della seconda e la quarta c franchi più della terza. La prima compra essendo costata x franchi, quanto fu speso in tutto?

Resultato. $4x + 3a + 2b + c.$

9.° Le tre cifre di un numero son tali che quella delle diecine sorpassa di 2 la cifra delle unità, e quella delle centinaia supera di 3 la cifra delle diecine. Qual'è la somma delle cifre, essendo x la cifra delle unità?

Resultato. $3x + 7.$

10.° Un commissionario porta un numero di vasi espresso da x . Ne rimette un numero a a un altro commissionario che ne aveva il doppio dei suoi. Dopo di ciò quanti ne porta ciascuno?

Resultato.

1.° Commissionario . . . $x - a$

2.° id. . . . $2x + a$

11.° Da un mazzo di 32 carte da giuoco se ne levano prima x e 3 di più; una seconda volta se ne tolgono il doppio di ciò che si levò la prima volta e 4 di più. Esprimere ciò che resta.

Resultato. $19 - 3x.$

12.° Moltiplicare:

$$(5ab + 3ac - 4bc) (7ab - 18ac + 2bc + d)$$

Resultato ridotto:

$$35a^2b^2 - 69a^2bc - 18ab^2c - 54a^2c^2 + 78abc^2 - 8b^2c^2 \\ + 5abd + 3acd - 4bcd.$$

$$13.^\circ \quad (4a^2 - 16ax + 3x^2)(5a^3 - 2a^2x).$$

$$\text{Resultato.} \quad 20a^5 - 88a^4x + 47a^3x^2 - 6a^2x^3.$$

14.º Moltiplicare:

$$(a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5) \\ (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3).$$

Resultato.

$$a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 \\ - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8.$$

15.º Moltiplicare, sommare e ridurre:

$$(2x^2 + ax - a^2)(x^2 + 2ax - a^2) + (2a^2 - x^2 - 3ax)(x^2 - a^2).$$

$$\text{Resultato.} \quad x^4 + 2ax^3 + 2a^2x^2 - a^4.$$

16.º Si fa un miscuglio di tre qualità di vino, il litro della seconda costa a soldi di più di quello della prima, e il litro della terza b soldi più di quello della seconda. Entrano nel miscuglio m litri della prima qualità, n della seconda e p della terza. Qual'è il prezzo totale del miscuglio, x essendo il prezzo del litro della prima qualità?

$$\text{Resultato.} \quad mx + nx + na + px + pa + pb.$$

17.º Un individuo ha un certo numero x di gettoni nella mano destra e 4 di più nella sinistra. Raddoppiando il numero di gettoni che aveva nella destra e triplicando invece quelli della sinistra, quanti gettoni avrà fra le due mani?

$$\text{Resultato.} \quad 5x + 12.$$

18.º Dividere:

$$4x^3 + 4x^2 - 29x + 21 \text{ per } 2x - 3.$$

$$\text{Resultato.} \quad 2x^2 + 5x - 7.$$

19.° Dividere :

$$3a^3 + 16a^2b - 23ab^2 + 14b^3 \text{ per } a^2 + 7ab.$$

Resultato. $3a^3 - 5a^2b + 2ab^2.$

20.° Dividere :

$$a^{m+n}b^n - 4a^{m+n-1}b^{2n} - 27a^{m+n-2}b^{3n} \\ + 42a^{m+n-3}b^{4n} \text{ per } a^mb^n - 7a^{m-1}b^{2n}.$$

Resultato. $a^n + 3a^{n-1}b^n - 6a^{n-2}b^{2n}.$

21.° Dividere :

$$8y^5 + (6a + 6)y^4 - (13a^2 - 7a + 18)y^3 + \\ (14a^3 - 41a^2 + 24a - 11)y^2 + (10a^4 - 25a^3 + 31a^2 + 7a - 5)y \\ - (25a^5 - 25a^4 + 11a^3 + 18a^2 - 33a + 10) \\ \text{per : } 2y^3 + (a + 2)y^2 - (a^2 - 3a + 5)y + (5a^3 - 8a^2 + 9a - 5).$$

Resultato. $4y^2 + (a - 1)y - (5a^2 + 3a - 2).$

22.° Si è fatto un miscuglio di quattro liquidi *A, B, C, D* composto di *a* litri di *A* a *m* soldi il litro, di *b* litri di *B* a *n* soldi, di *c* litri di *C* a *p* soldi e di *d* litri di *D* a *q* soldi. Qual'è il prezzo del litro del miscuglio ?

Resultato. $\frac{am + bn + cp + dq}{a + b + c + d}.$

23.° Effettuare le operazioni indicate sulle frazioni che seguono :

$$\frac{3a - 4b}{7} - \frac{2a - b - c}{3} + \frac{15a - 4c}{12}.$$

Resultato. $\frac{85a - 20b}{84}.$

24.° Effettuare le operazioni indicate :

$$\left(\frac{a+x}{a-x} + \frac{b-x}{b+x} \right) \left(\frac{a-x}{a+x} + \frac{b+x}{b-x} \right).$$

Resultato. $\frac{4(ab + x^2)^2}{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}.$

§ 4.

25.° Risolvere l'equazione ad un'incognita e di primo grado :

$$2x + 7 + \frac{3}{2}x = 6x - 23.$$

Resultato. $x = 12.$

26.° Risolvere l'equazione :

$$\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{3x}{4} - \frac{7x}{8} + 15 = 0.$$

Resultato. $x = 66 \frac{2}{3}.$

27.° Risolvere l'equazione:

$$3,25x - 5,007 - x = 0,2 - 0,34x.$$

Resultato. $x = 2 \frac{27}{259}.$

28.° Risolvere l'equazione:

$$\frac{a + 3x}{4a} - \frac{7a - 5x}{6b} + 3 - \frac{9x}{4} = \frac{x}{ab} + \frac{5x}{6b}.$$

Resultato. $x = \frac{39ab - 14a^2}{27ab + 12 - 9b}.$

29.° Risolvere l'equazione:

$$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)} = 3cx + \frac{b^2x}{a}.$$

Resultato.

$$x = \frac{ab[3a^2c + 3abc + a^2b]}{(a+b)[3a^2c + 3abc - ab^2]}.$$

30.° Risolvere l'equazione.

$$(a+x)(b+x) - a(b+c)x = \frac{a^2c}{b}.$$

Resultato. $x = \frac{ac}{b}.$

31.° Dividere trenta franchi fra due persone in guisa che l'una abbia tanti pezzi da 2 franchi quanti l'altra da mezzo franco.

Resultato. Alla prima persona 24 f.ⁱ, alla seconda 6 f.ⁱ.

32.° Dividere un numero a in due parti che stieno fra loro come $m : n$.

Resultato.

Le due parti sono: $\frac{ma}{m+n}, \frac{na}{m+n}$.

33.° Trovare un numero tale che divisolo prima per m poi per n e sommando i risultati si ottenga la somma a .

Resultato. Il numero è $\frac{mna}{m+n}$.

34.° La guarnigione di una piazza si compone di 2600 uomini fra i quali fantaccini, cavalieri e artiglieri. I fantaccini sono nove volte i cavalieri, e gli artiglieri tre volte pure i cavalieri. Quanti uomini vi sono per arma?

Resultato. 1800 fantaccini, 600 artiglieri e 200 cavalieri.

35.° Moltiplicando un certo numero per 4 e dividendo il prodotto per 3 si ottiene 24. Qual'è questo numero?

Resultato. 18.

36.° Quattro creditori A, B, C, D hanno da dividersi franchi 21,000; il credito di A sta a quello di B come 2 a 3 e quello di B sta a quello di C come 4 a 5 e quello di C a quello di D come 6 sta a 7. Qual'è la parte di ciascheduno?

Resultato. Parte di A 3200 franchi,
 id. B 4800 "
 id. C 6000 "
 id. D 7000 "

37.° Un mercante ha calcolato che il suo commercio gli rende il 15 per cento, il che ha portato il suo avere totale a 15571 fr. Qual'era il suo capitale?

Resultato. 13540 fr.

38.° Un capitale è tale che accresciuto dei suoi interessi semplici per 5 anni a 4 per cento si elevò alla somma di fr. 8208. Qual'era il capitale?

Resultato. 6840 fr. X

39.° Due mercanti si dividono 500 fr. in guisa che l'uno di essi non deve avere che la metà di ciò che spetta all'altro, più 50 fr. pel suo lavoro. Quanto tocca a ciascheduno?

Resultato. 300 fr. ad uno e 200 all'altro.

40.° Tre proprietari A , B , C si scompartiscono 8000 are di bosco. B ne ha 276 meno di A e C 1112 più di B . Quante ne tocca a ciascheduno?

Resultato. Parte di $A = 2480$ are.
id. di $B = 2204$ id.
id. di $C = 3316$ id.

41.° Un uomo morendo lascia a sua moglie la metà del suo patrimonio, a ognuno dei suoi due figli il sesto, il dodicesimo al servo e 600 lire rimanenti ai poveri. A quanto ammontava il patrimonio?

Resultato. 7200 lire.

42.° Cinque giuocatori A , B , C , D , E hanno perduto insieme 17,75. La perdita di B oltrepassa di un mezzo franco il triplo di quella di A ; la perdita di C eguaglia il doppio di quella di B meno 2 fr. D ha perduto un quarto di franco meno di A e B insieme; E due volte la perdita di B meno 3 fr. Quanto ha perso ciascuno?

Resultato. Perdita di A 1 fr., di B 3,50, di C 5, di D 4,25, di E 4.

43.° Due individui A e B giocano al biliardo di 1 lira la partita. Avanti di principiare A aveva lire 42 e B lire 24; dopo un certo numero di partite A si trova ad avere 5 volte più di B . Quante partite vinse A a B ?

Resultato. 13 partite.

44.° Preso un certo numero lo si moltiplichi per 7, si aggiunga 3 al prodotto, si divida il risultato per 2 e si aggiunga 4 al quoziente. Se il risultato che si trova è 23 quale era il numero scelto?

45.° Un maestro di aritmetica proponeva ai suoi alunni di indovinare un numero al quale aveva pensato. Moltiplicando, diceva egli, questo numero per 3 e togliendo dal prodotto 24, poi dividendo il resto per 6, e aggiungendo 13 al quoziente vi ritroverete il numero pensato. Quale è questo numero?

46.° Due mobili si muovono nella stessa direzione; il secondo comincia a muoversi quando il primo è già in moto da n secondi. La velocità del secondo sta a quella del primo come $q : p$. Dopo quanti secondi il secondo avrà raggiunto il primo?

Resultato.

$$\frac{pn}{q-p}.$$

47.° Da una città A un reggimento si pone in marcia verso la città B facendo $3 \frac{1}{2}$ miriametri al giorno; da B , 8 giorni più tardi, un altro reggimento si pone in marcia per andare verso A facendo $5 \frac{1}{6}$ miriametri per giorno. La distanza fra i due punti di partenza è di 80 miriametri. A che giorno di marcia del primo reggimento i due corpi si incontreranno?

Resultato.

Il 14.° giorno.

48.° Una divisione partita da una posizione fa $4 \frac{1}{2}$ miriametri al giorno. Un'altra che la insegue partita due giorni dopo vorrebbe raggiungerla in sei giorni. Quanti miriametri per giorno dovrà fare:

Resultato.

6 miriametri.

49.° Due corpi si muovono sopra una circonferenza di p metri; la loro distanza iniziale è di d metri; il primo fa c e il secondo C metri al secondo. Quando i due mobili si incontreranno la prima, seconda ec. volta supponendo che la loro velocità non sia alterata dall'incontro?

Resultato.

$$\begin{array}{llll}
 \text{La 1.}^{\circ} \text{ volta dopo } \frac{d}{b-c} \text{ secondi,} & & & \\
 \text{• 2.}^{\circ} \text{ id. } \frac{p+d}{C-c} \text{ id.} & & & \\
 \text{• 3.}^{\circ} \text{ id. } \frac{2p+d}{C-c} \text{ id.} & & &
 \end{array}$$

50.° Risolvere un problema analogo supponendo però che i due mobili andassero in senso inverso e il primo partisse t secondi più tardi dell'altro.

Resultato.

$$\begin{array}{llll}
 \text{1.}^{\circ} \text{ incontro dopo } \frac{d-ct}{C+c} \text{ secondi,} & & & \\
 \text{2.}^{\circ} \text{ id. } \frac{p+d-ct}{C+c} \text{ id.} & & & \\
 \text{3.}^{\circ} \text{ id. } \frac{2p+d-ct}{C+c} \text{ id.} & & &
 \end{array}$$

51.° Due orologi battono l'ora insieme e si intendono in tutto diciannove colpi. Dedurne che ora è, sapendo che uno va indietro due secondi rispetto all'altro e che i colpi del primo si succedono coll'intervallo di tre secondi e quelli del secondo coll'intervallo di quattro, e ammettendo che si senta un sol colpo quando i due orologi battono nel medesimo secondo.

Resultato.

ore 11.

52.° Come avviene, diceva un viaggiatore ad un altro, che tu mi abbia sorpassato 3000 passi quando ognuno dei miei passi è il doppio di ognuno dei tuoi? È vero, rispose l'altro, ma io nello stesso tempo fo il quintuplo dei passi che fai tu. Quanti passi ha fatto ogni viaggiatore?

Resultato. Il primo viaggiatore ha fatto 1000 passi ed il secondo 5000 passi.

53.° Due grandezze la cui differenza è d stanno per effetto di tre cause indipendenti fra loro nei rapporti $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$. Quali sono queste grandezze?

Resultato.

$$\begin{aligned} \text{l' una} & \frac{m m' m'' d}{n n' n'' - m m' m''} \\ \text{l' altra} & \frac{n n' n'' d}{n n' n'' - m m' m''} \end{aligned}$$

54.° Nel tragitto di una vettura si è osservato che la ruota davanti la cui circonferenza è di lunghezza a ha fatto n giri più della ruota di dietro la cui lunghezza è b . Esprimere il tragitto totale.

Resultato.

$$\frac{a b n}{b - a}.$$

55.° Un oréfice ha due verghe d'argento a titoli differenti; la prima ha 0,910 di fino, la seconda 0.875. Vuol fare una lega di 100 grammi a 0,889 di fino. Quanti grammi deve prendere da ognuna delle due verghe?

Resultato.

40 grammi della 1.ª verga e 60 della 2.ª

56.° Si domandano pezzi da 50 centesimi e da 2 franchi per formare 14 franchi. I pezzi debbono essere 16 in tutto. Quanti se ne dovranno prendere per ogni specie?

Resultato.

12 pezzi da 0,50 e 4 da 2 franchi.

57.° Due persone hanno una 30 anni, l'altra 20; le loro età stanno perciò nel rapporto 3 : 2. Fra quanti anni questo rapporto sarà $\frac{5}{4}$.

Resultato.

Dopo 20 anni.

58.° Si è mescolato del nitro e dello zolfo nella proporzione di 7 parti di nitro e 3 di zolfo per farne una massa di 80 chilogrammi. Quanto nitro dovrebbesi aggiungere onde la proporzione dei due elementi fosse di 11 parti di nitro e 4 di zolfo.

Resultato.

10 chilogrammi.

59.° In una società numerosa in origine gli uomini erano il triplo delle donne. Dopo la partenza di 8 coppie il

numero degli uomini divenne 5 volte quello delle donne. Quanti uomini e donne eranvi in origine?

Resultato. 16 donne e 48 uomini.

60.° Un rettangolo, la lunghezza del quale è doppia dell'altezza è tale che aumentato ogni lato di un metro cresce in superficie di nove metri quadrati. Quale è la lunghezza dei suoi lati?

Resultato.

altezza $2^m \frac{2}{3}$, lunghezza $5^m \frac{1}{3}$.

61.° Une botte piena di vino ha tre robinetti; se si apre il primo, la botte si vuota in 2 ore; aprendo il secondo si vuota in 3 ore, e aperto il terzo in 4 ore. Quanto tempo occorrerà per vuotarla aprendo simultaneamente i tre robinetti?

62.° Una vasca è ripiena da quattro cannelle. La prima versando da sola la riempirebbe in a ore, la seconda in b ore, la terza in c e la quarta in d . Quanto tempo occorrerà alle quattro cannelle versanti insieme per empire la vasca?

Resultato. Un numero d'ore rappresentato da:

$$\frac{abcd}{abd + abc + acd + bcd}$$

63.° Si hanno tre verghe di metallo dello stesso volume, ma di pesi differenti:

5 centimetri cubi della 1 ^a	pesano grammi 69 $\frac{3}{4}$
3 $\frac{1}{3}$ " della 2 ^a	41
4 $\frac{2}{7}$ " della 3 ^a	91

Supposto che le tre verghe insieme abbiano il peso totale di 949 grammi $\frac{2}{3}$, qual'è il volume di ognuna?

Resultato.

volume comune 20 centimetri cubi.

64.° Un individuo vuol porre il suo orologio in lotteria facendo un certo numero di biglietti; a 4 franchi il biglietto

perderebbe 30 fr. sul prezzo dell'orologio; a 5 fr. invece guadagnerebbe 50 fr. Quanti biglietti ha fatto e quanto costa l'orologio?

65.° Per pagare tutte le mie spese, diceva un operaio, mi occorrerebbero 540 lire all'anno; ma io non le guadagno, se guadagnassi $3\frac{1}{2}$ volte ciò che guadagno realmente non solamente pagherei tutte le mie spese ma risparmierei ogni anno tanto quanto mi manca attualmente per fare la rendita necessaria. Quanto guadagna questo operaio?

Resultato. 240 lire.

66.° Che distanza vi è fra quei due punti, si dimandava ad un misuratore? Non sorpassa i 1000^m egli risponde, e se dopo avervi aggiunto il suo terzo e 176^m più moltiplicasi il risultato per $2\frac{1}{2}$, il numero ottenuto supera di tanto i 1000^m di quanto la distanza cercata ne è al disotto. Qual'è questa distanza?

67.° Un capitalista erasi obbligato ad imprestare a un mercante 16000 lire per 15 mesi, ma non potendo rimettergli tutta la somma in una volta conviene col mercante di dargli subito 5000 lire, 6 mesi dopo 3000 lire e dopo 8 mesi 8000 lire. Quanto tempo il mercante può ritenere il capitale imprestato di 16000 lire senza che ne soffra danno nè l'uno nè l'altro?

Resultato. tempo totale mesi $23\frac{1}{2}$

68.° Un debitore si è obbligato a pagare un debito di 7000 fr. alle scadenze che seguono, cioè: 2000 fr. fra mesi $3\frac{1}{2}$, 3500 fr. in 4 mesi e 1500 in 14 mesi; il suo creditore gli fa la proposta di soddisfare al suo debito in due pagamenti ognuno di 3500 lire per modo che la seconda scadenza succeda un mese dopo la prima. Il debitore avendo accettato quando ha luogo la prima scadenza?

69.° Un servitore riceve dal suo padrone 240 lire all'anno e la livrea. Alla fine del 5° mese dimanda di lasciare il servizio; il padrone gli paga 37 lire e gli lascia la livrea. Quanto è stimata quest'ultima?

Resultato. prezzo di stima della livrea lire 108.

70.° Un maestro muratore prende a lavoro un operaio a cui promette 1,50 per ogni giorno di lavoro, a condizione di ritenerli 0,60 ogni giorno d'assenza; dopo 50 giorni l'operaio riceve 49,80. Quanti giorni mancò al lavoro?

Resultato. 12 giorni.

71.° Si dimandava a un cuoco che portava arance, quante ne avesse nel suo paniere. Il cuoco calcolatore abile risponde: mi son costate 90 centesimi la dozzina, e se ne avessi avute 4 di più col danaro che ho speso, mi verrebbero a costare 10 centesimi di meno alla dozzina. Quante arance aveva?

Resultato. 32 arance.

72.° Trovare una proporzione i quattro termini della quale superino della stessa quantità i numeri 2, 3, 7, 9.

Resultato. 5 : 6 :: 10 : 12.

73.° In una città ogni proprietario pagava in contribuzioni la settima parte della rendita: le contribuzioni essendo cresciute e portate al sesto della rendita, di quanto il proprietario dovrà aumentare il prezzo delle pigioni onde avere la stessa rendita netta?

Resultato.

di $\frac{1}{35}$ delle primitive pigioni.

74.° Un contadino vò in città a vendere uova; ne vende dapprima la metà più 4; indi la metà, di ciò che gli resta più 2; poscia la metà del nuovo resto più 6. Ciò fatto torna a casa con 2 uova. Quante ne portò in città?

Resultato. 80 uova.

75.° Io prendo un numero lo moltiplico per $3\frac{1}{7}$ e tolgo 60 dal prodotto; moltiplico il resto per $2\frac{1}{2}$ e tolgo 30 dal prodotto, non resta niente. Qual'era il numero?

76.° Si hanno 4 botti di diversa capacità colla prima si empie la seconda e ne avanzano i $\frac{4}{7}$; colla seconda si empie la terza e ne avanza $\frac{1}{4}$; colla terza si empiono i $\frac{9}{16}$ della quarta; infine se si empissero la terza e la quarta colla prima ve ne rimarrebbero ancora 15 litri. Qual'è la capacità delle 4 botti?

77.° Risolvere il sistema di equazione.

$$\begin{aligned} 7x + \frac{5}{2}y &= 411 \frac{1}{2} \\ 30x - 14y + 935 \frac{3}{10} &= 0. \end{aligned}$$

Resultato. $x = 17 \frac{1}{2}, y = 115 \frac{3}{5}.$

78.° Risolvere le equazioni:

$$\begin{aligned} 113 \frac{1}{2}x - 27 \frac{5}{7}y &= 10y + 5488 \frac{3}{7} \\ 9y - 347 &= 5x - 420. \end{aligned}$$

Resultato. $x = 56, y = 23.$

$$\begin{aligned} 79.° \quad bcx + 2b - cy &= 0, \\ b^2y + a \frac{(c^2 - b^2)}{bc} - \frac{2b^3}{c} + c^2x &= 0. \end{aligned}$$

Resultato. $x = \frac{ab}{c}, y = \frac{a + 2b}{c}.$

$$\begin{aligned} 80.° \quad 2x + y - 7z + 288 &= 0, \\ 5x - y + 3z &= 227, \\ 7x + 6y + z &= 297. \end{aligned}$$

Resultato. $x = 13, y = 24, z = 62.$

$$\begin{aligned} 81.° \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= b, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= c. \end{aligned}$$

Resultato.

$$x = \frac{2}{a + b - c}, y = \frac{2}{a + c - b}, z = \frac{2}{b + c - a}.$$

$$\begin{aligned}
 82.^{\circ} \quad & 3x + 6y - 2z + 9u = 6, \\
 & 4y - 5x + 5z - 6u = 5, \\
 & 2z + 8y - 3x - 3u = 3, \\
 & 10y + 3z - 4x + 9u = 9.
 \end{aligned}$$

Resultato. $x = 2, y = \frac{1}{3}, z = 3, u = \frac{1}{3}.$

83.° *A* dice a *B*. Dammi 100 franchi e io possederò quanto te. Dammene 100 dice *B* ad *A* e avrò il doppio di te. Quanto aveva ciascuno?

Resultato. *A* aveva 50 fr., e *B*, 700.

84.° Che età hai? domandava un figlio al padre. Sei anni fa, risponde questo, io sorpassava del terzo il triplo della tua età. Fra tre anni invece occorrerà moltiplicare la tua età per $2\frac{1}{2}$, onde avere la mia. Qual'è l'età del padre e quella del figlio?

Resultato. L'età del padre era 36 anni e quella del figlio 15.

85.° Un capitalista si fa imprestare 32000 lire a una certa tassa per coglier l'occasione di situarne 92000 a tassa maggiore; guadagna così 3160 lire. Un'altra volta prende alle stesse condizioni 37000 lire e ne presta 70000, il che gli produce un beneficio di 1835 lire. A che tassa si fece imprestare ed imprestò?

Resultato. Prese a prestito al $4\frac{1}{2}\%$ e imprestò al 5 per $\frac{1}{2}\%$.

86.° Si son pagati 8 chilogrammi di zucchero e 19 di caffè lire 104,60. Un'altra volta si è dato alle stesse condizioni e per 20 chilogrammi di zucchero e 16 di caffè la somma di 129,20. Qual'è il prezzo del chilogrammo di zucchero e di caffè?

87.° Supponendo che 40 leghe di Francia valgano $12\frac{1}{2}$ miglia di Germania più di 43 miglia inglesi e che 10 leghe di Francia valgano $11\frac{1}{2}$ miglia di Germania meno $26\frac{1}{2}$ inglesi trovare i rapporti della lega di Francia e del miglio inglese col miglio di Germania e il rapporto della lega di Francia al miglio inglese.

Resultato. La lega di Francia è $i \frac{3}{5}$ del miglio di Germania. La stessa lega è $\frac{318}{115}$ del miglio inglese. Il miglio inglese è $\frac{23}{106}$ del miglio di Germania.

88.° Qual'è la frazione tale che aggiungendo 1 al suo numeratore diviene $\frac{1}{3}$ e aggiungendo 1 al denominatore diventa invece $\frac{1}{4}$?

Resultato. $\frac{4}{15}$.

89.° Degli ufficiali hanno fatto un pranzo di corpo; se fossero stati 5 di più e avessero pagato 1 lira di più caduno la spesa totale sarebbesi accresciuta di 61,50; se invece fossero stati 3 di meno pagando 1,50 di meno ognuno la spesa sarebbe invece scemata di 42 lire. Quanti erano? quanto pagò ognuno?

90.° Tempo indietro l'avena ed il grano costavano l'una 2 lire, l'altro 1 lira meno del prezzo attuale all'ettolitro e il rapporto dei due prezzi era di $\frac{6}{7}$; adesso stanno invece fra loro come 8 : 9. Quanto costano all'ettolitro l'avena ed il grano?

Resultato. L'avena costava 32 lire e il grano 36.

91.° 37 chilogrammi di stagno pesati nell'acqua perdono 5 chilogrammi di peso; una composizione di piombo e stagno di 120 chilogrammi perde 14 chilogrammi nell'acqua. Determinare quanto piombo e quanto stagno entrano nella lega.

Resultato. 46 chilogr. di piombo e 74 stagno.

92.° Secondo Vitruvio la corona di Gierone re di Siracusa pesava 20 libbre. Archimede trovò che immergendola nell'acqua perdeva libbre $1 \frac{1}{4}$ del peso. Sapendo che la corona era solo composta di oro e di argento i cui pesi spe-

cifici rispettivi sono 19,64 e 10,5 quanto oro e quanto argento entrava nella corona?

93.° Essendo a la somma di due numeri e b la differenza dei loro quadrati quali sono questi numeri?

Resultato. I numeri sono:

$$\frac{a^2 + b}{2a}, \frac{a^2 - b}{2a}.$$

94.° Trovare tre numeri che aggiunti due a due diano le somme a , b , c .

I numeri sono:

$$\frac{a + b - c}{2}, \frac{a + c - b}{2}, \frac{b + c - a}{2}.$$

95.° Si hanno tre borse che contengono ognuna una certa somma. Si prendono 20 lire dalla prima e si mettono nella seconda che contiene allora il quadruplo di ciò che riman nella prima. Se invece si prendessero 60 lire dalla seconda per porle nella terza vi sarebbe in questa $1\frac{3}{4}$ di ciò che resta nella seconda. Prese invece 40 lire dalla terza per porle nella prima vi rimangon sempre $2\frac{7}{8}$ di ciò che dopo l'aggiunta contien la prima. Quanto vi era in origine in ogni borsa?

96.° Tre individui hanno speso una somma che nessuno di essi potrebbe pagare da solo. A dice a B . Dammi il quarto di ciò che hai e pagherò solo. B dice a C . Dammi l'ottava parte di quello che hai e pagherò io. C dice ad A : io non ho che quattro lire, ma se mi dai la metà dei tuoi denari potrò pagare io pure.

Qual'è la somma a pagarsi e quanto possedeva ciascuno?

Resultato.

A aveva 6,50, B 5,00 e C 4,00.

97.° Un mercante ha tre magazzini dove tiene le sue mercanzie di tre specie differenti; il primo contiene 8 quintali di grano, 3 di segala e 2 di orzo; il secondo, 3 di grano,

10 di segala e 7 d'orzo; il terzo, 6 di grano, 9 di segala e 13 d'orzo. Il valore delle mercanzie contenute in ciascun magazzino è stimato rispettivamente di 2936 lire, 3248 lire, e 4520 lire. Qual'è il prezzo del quintale di ogni specie di cereali?

Resultato. 224 lire pel grano, 168 per la segala e 128 per l'orzo.

98. Tre cannelle A , B , C versano in un bacino. A e B lo riempirebbero in 70 minuti, A e C in 84 e B e C in 140. Quanto occorrerà per riempire il bacino: 1.° ad ogni cannella, 2.° alle tre cannelle versanti insieme?

Resultato.

	alla 1. ^a cannella	105 minuti
•	2. ^a	210 •
•	3. ^a	420 •

A tutte insieme 1 ora.

99.° Un ammiraglio deve distribuire delle prede pel valore di 31824 lire agli equipaggi di tre vascelli che comanda. Se dasse 12 lire a ogni uomo del primo vascello i due altri non avrebbero che 6 lire per testa; se il secondo vascello ricevesse 12 lire per uomo gli altri due non avrebbero che 4 lire a testa. Se infine ogni uomo del terzo vascello avesse le 12 lire ogni uomo degli altri due non riceverebbe che 3 lire. Qual'è la forza dell'equipaggio di ogni vascello?

100.° Determinare un numero di tre cifre tale: 1.° che le cifre sieno in equidifferenza continua; 2.° che il quoziente di questo numero per la somma delle sue cifre sia eguale a 48; 3.° e che togliendo 198 da questo numero, il resto sia il numero stesso rovesciato.

Resultato.

il numero è 432.

§ 5.

101.° Risolvere l'equazione.

$$x^2 + 6x = 27.$$

Resultato. $x = 3, x = -6.$

102.° Risolvere l'equazione.

$$6\frac{3}{5}x - 21\frac{15}{16} = x^2.$$

Resultato. $x = 22\frac{4}{5}, x = 48\frac{2}{3}.$

103.° Risolvere l'equazione.

$$8x^2 - 7x + 34 = 0.$$

Resultato. $x = \frac{7 \pm \sqrt{-1039}}{16}.$

104.° Risolvere l'equazione.

$$\frac{25x + 180}{10x - 81} = \frac{40x}{5x - 8} - \frac{3}{5}.$$

Resultato. $x = 14\frac{3}{5}, x = \frac{72}{245}.$

105.° Risolvere l'equazione.

$$(4a^3 - 6cd^2)x^2 - (4a^2c^2 + 4abd^2)x + (ac^2 + bd^2)^2 = 0.$$

Resultato.

$$x = \frac{ac^2 + bd^2}{2a - 3d\sqrt{c}}, x = \frac{ac^2 + bd^2}{2a + 3d\sqrt{c}}.$$

106.° Risolvere l'equazione.

$$\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}.$$

Resultato. $x = 6, x = -3\frac{1}{2}.$

107.° Si è pensato ad un numero; lo si moltiplica per $2\frac{1}{3}$ e si aggiunge 7 al prodotto; quindi si moltiplica il risultato per 8 volte il numero pensato, si divide per 14 e si toglie dal quoziente il quadruplo del numero stesso; si ottiene 2352. Qual'è il numero pensato?

Resultato. Il numero è 42.

108.° Trovare un numero tale che il suo quadrato lo sorpassi di 306.

Resultato. Il numero è 18.

109.° Un individuo al quale si domandava l'età, rispose: Mia madre compiva il ventesimo anno quando io nacqui e oggi il numero dei suoi anni moltiplicato pel mio sorpassa di 2500 la somma delle nostre età. Che età aveva?

Resultato. 42 anni.

110.° I fazzoletti che io ho comperati costano 60 lire; se ne avessi avuti tre di più per lo stesso prezzo mi verrebbero a costare 1 lira di meno per ciascheduno. Quanti ne ho comprati?

Resultato. 12 fazzoletti.

111.° Un individuo avea destinato una somma di 864 lire onde soccorrere i poveri della sua parrocchia; 6 fra i medesimi essendo morti, ciascuno dei rimanenti riceve 2 lire di più. Quanti erano i poveri in origine?

112.° Una società di 20 persone uomini e donne ha speso 48 lire in una locanda e cioè: tutti gli uomini presi insieme 24 lire e tutte le donne altrettanto. Si trova però che ogni uomo ha pagato 1 lira di più di ogni donna. Quanti individui per sesso vi erano?

Resultato. 8 uomini e 12 donne.

113.° Due contadine portano uova al mercato, 140 in tutte e due e ne ritraggono ognuna il medesimo prezzo. Se

avessi avuto le tue uova, diceva una vendendole al prezzo al quale ho venduto le mie, ne avrei ricavato 30 soldi. Ed io, risponde l'altra, se avessi venduto le tue al prezzo al quale ho vendute le mie avrei ritratto $53\frac{1}{3}$ soldi.

Quante uova per ciascheduna?

Resultato. La prima aveva 80 uova e la seconda 60.

114.° Due viaggiatori A e B partono nel medesimo tempo da due luoghi differenti C e D e vanno uno incontro all'altro, dopo essersi incontrati calcolano la strada percorsa e quella che resta loro a percorrere; trovano che A fece 30 miriametri più di B e che ad A abbisognano 4 giorni per arrivare in D e a B 9 giorni per arrivare in C . Qual'è la distanza fra i punti C e D ?

Resultato. La distanza è 150 miriametri.

115.° Quanto avete in cassa? si dimandava ad un individuo. Se avessi 1578 lire di più o 142 lire di meno la radice cubica del primo numero sorpasserebbe di 10 la radice cubica del secondo. Quanto aveva in cassa?

Resultato. Aveva in cassa lire 150.

116.° Qual'è il numero che aggiunto alla sua radice quadrata dà per somma 1332?

Resultato. Il numero è 1296.

117.° Si hanno tre numeri in proporzione continua per quoziente; la somma di questi tre numeri è 126 ed il prodotto 13824. Trovare questi numeri?

Resultato. I numeri sono 6, 24, 96.

118.° Si vuol trovare un numero di 3 cifre tale che la somma dei quadrati di queste cifre sia 104; che il quadrato della cifra media superi di 4 il doppio prodotto delle altre due e infine che togliendo 594 da questo numero il resto sia il numero stesso rovesciato.

Resultato. Il numero è 862.

§ 6.

119.° Trovare il massimo comun divisore fra i polinomi.

$$P = 9x^3 + 53x^2 - 9x - 18.$$

$$P' = x^3 + 11x + 30.$$

Resultato. Questo massimo comun divisore è $x + 6$.

120.° Trovare il massimo comun divisore fra i polinomi.

$$P = x^3 - 3xy + xs + 2y^2 - 2yz.$$

$$P' = x^2 - y^2 + 2ys - s^2.$$

Resultato. Il massimo comun divisore è $x + y - z$.

121.° Semplicizzare la frazione.

$$\frac{27a^5b^3 - 18a^4b^3 - 9a^3b^3}{36a^5 - 18a^4 - 27a^3 + 9a^2}.$$

Resultato.
$$\frac{(3a + 1)b^3}{4a^3 + 2a - 1}.$$

122.° Trovare il massimo comun divisore fra i polinomi.

$$P = 20x^6 - 12x^5 + 16x^4 - 15x^3 + 14x^2 - 15x + 4.$$

$$P' = 15x^5 - 9x^4 + 47x^3 - 21x + 28.$$

Resultato. Il massimo comun divisore è $5x^2 - 3x + 4$.

§ 7.

123.° Ridurre in frazion continua la frazione ordinaria $\frac{907}{18564}$ e trovarne le varie ridotte.

Il risultato è:

$$\cfrac{1}{\cfrac{20 + 1}{\cfrac{2 + 1}{\cfrac{7 + 1}{\cfrac{5 + 1}{\cfrac{2 + 1}{\cfrac{1 + 1}{3}}}}}}}$$

Le ridotte sono :

$$\frac{1}{20}, \frac{2}{41}, \frac{15}{307}, \frac{77}{1576}, \frac{169}{3459}, \frac{246}{5035}, \frac{907}{19564}.$$

124.° Ridurre in frazione ordinaria la frazione continua.

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{87}}}}}$$

Resultato. $\frac{351}{965}.$

125.° Svolgere in frazione continua $\sqrt{28}$ e trovare le prime sette ridotte.

Resultato. $\sqrt{28} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{10 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 \text{ ec.}}}}}}}$

Ridotte.

$$5, \frac{16}{3}, \frac{37}{7}, \frac{127}{24}, \frac{1307}{247}, \frac{4048}{765}, \frac{9403}{1777}.$$

§ 8.

126.° Sviluppare $(5 - 4x)^4$.

Resultato. $625 - 2000x + 2400x^2 - 1280x^3 + 256x^4.$

127.° Qual'è il quinto termine dello sviluppo $(a + b)^{16}$.

Resultato. $1820 a^{12} b^4.$

128.° Qual'è il quarto termine di $(a - b)^{100}$.

Resultato. $161700 a^{97} b^3.$

§ 9.

129.° Estrarre la radice quadrata dal polinomio.

$$9x^2 - 30ax - 3a^2x + 25a^2 + 5a^3 + \frac{a^4}{4}$$

Resultato. $3x - 5a - \frac{a^2}{2}.$

130.° Estrarre la radice cubica dal polinomio.

$$y^6 - 6ay^5 + 12a^2y^4 - 8a^3y^3.$$

Resultato. $y^3 - 2ay.$

§ 10.

131.° Effettuare le operazioni:

$$\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} + 9\sqrt{48}.$$

Resultato. $59\sqrt{3}.$

132.° Effettuare le operazioni:

$$8\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}}.$$

Resultato. $\frac{29}{2}\sqrt{3}.$

133.° Effettuare le operazioni:

$$2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Resultato. $\frac{28\sqrt{15}}{15}.$

134.° Moltiplicare:

$$(6 + 12\sqrt{7})(3 - 5\sqrt{7}).$$

Resultato. $6\sqrt{7} - 402.$

135.° Moltiplicare :

$$(9 \sqrt{12} + 3) (5 \sqrt{12} + 8).$$

Resultato. $540 + 87 \sqrt{12}.$

136.° Moltiplicare :

$$(9 + 2 \sqrt{10}) (9 - 2 \sqrt{10}).$$

Resultato. $41.$

137.° Moltiplicare :

$$(2 \sqrt{8} + 3 \sqrt{5} - 7 \sqrt{2}) (\sqrt{72} - 5 \sqrt{20} - 2 \sqrt{2}).$$

Resultato. $42 \sqrt{10} - 174.$

138.° Semplicizzare l'espressione :

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Resultato. $4x \sqrt{x^2 - 1}.$

139.° Far sparire gli irrazionali dal denominatore della frazione :

$$\frac{6 - 3 \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}.$$

Resultato. $\frac{3 \sqrt{5} - 9}{4}.$

140.° Rendere razionale il denominatore dell'espressione :

$$\frac{3 \sqrt{5} - 2 \sqrt{2}}{3 \sqrt{5} - \sqrt{18}}.$$

Resultato. $\frac{18 + 5 \sqrt{10}}{2}.$

141.° Far scomparire gli irrazionali dal denominatore della frazione:

$$\frac{156 + 12 \sqrt{11}}{6 + 14 \sqrt{2} - 2 \sqrt{11}}.$$

Resultato. $7 \sqrt{2} + 11 - \sqrt{3}.$

§ 12.

142.° Risolvere e discutere l'equazione:

$$z^4 - 10z^2 = 11.$$

Resultato della risoluzione.

$$z = \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{14}}.$$

(Sarà poi facile la discussione).

143.° Trasformare il radicale doppio:

$$\sqrt{43 - 15 \sqrt{8}}.$$

Resultato. $5 - 3 \sqrt{2}.$

144.° Trasformare:

$$\sqrt{5 - \sqrt{24}}.$$

Resultato. $\sqrt{3} - \sqrt{2}.$

145.° Trasformare:

$$\sqrt{28 + 5 \sqrt{12}}.$$

Resultato. $5 + \sqrt{3}$

146.° Trasformare :

$$\sqrt{16 - 24\sqrt{-5}}.$$

Resultato. $6 - \sqrt{-20}.$

147.° Trasformare :

$$\sqrt{-2 - 2\sqrt{-15}}.$$

Resultato. $\sqrt{3} - \sqrt{-5}.$

§ 15.

148.° Un servo entrando in una casa riceve il primo anno 240 lire e il suo padrone gli promette di crescergli ogni anno il salario di 36 lire se è contento di lui; il servo avendo sempre servito bene, si domanda quanto dovrà ritirare il 17° anno e ciò che avrà avuto in tutti i 17 anni?

Resultato. Il 17° anno ritira 816 lire ed in tutto ne ha avute 8976.

149.° Un viaggiatore che vuol compiere un viaggio in 19 giorni si accomoda in guisa da fare ogni giorno un quarto di miriametro più del precedente. L'ultimo giorno fa 14 miriametri e mezzo. Quanti miriametri fece il primo giorno e nell'intiero viaggio?

Resultato. Il primo giorno fece 10 miriametri ed in totale $232 \frac{1}{4}$.

150.° Qual'è la ragione di una progressione aritmetica di 22 termini che comincia con 1 e finisce con 15?

Resultato. $\frac{2}{3}.$

151.° Si domandava ad un servitore quanto avesse all'anno di stipendio. Ricevo ore 550 lire, risponde egli; il

primo anno mi davano 100 lire ed ogni anno il mio stipendio è cresciuto di 30 lire. Da quanto tempo è al servizio.

Resultato.

Da 16 anni.

152.° In questo mese ho economizzato 78 lire, diceva un operaio, e da che porto le mie economie alla cassa di risparmio vi ho posto 1350 lire economizzando ogni mese 2 lire più del precedente.

Da quanto tempo l'operaio porta danaro alla cassa e quanto vi portò il primo mese?

Resultato. Da 25 mesi e il primo mese vi pose 30 lire.

153.° Un fisico ha osservato che dal dì 8 al 19 giugno escluso di un certo anno, il termometro salì ogni giorno di mezzo grado, e che la media aritmetica di tutte le osservazioni era $18.^{\circ} \frac{3}{4}$. Quale temperatura segnò il termometro l'8 di giugno?

Resultato.

16 gradi.

154.° Un capitano di vascello volendo ricompensare il suo equipaggio che avea eseguita una bella manovra, dà una certa somma al marinaio che si è il più distinto, al secondo per ordine di distinzione un poco meno, al terzo altrettanto di meno e così di seguito fino all'ultimo che si è il meno distinto. Due marinai essendo assenti al momento della gratificazione, due dei loro compagni ricevono la loro parte e mettono ciascuno nella borsa la propria parte e quella del compagno assente: uno ha ricevuto per sè e per l'assente 92 lire, l'altro per sè e l'assente 71 lire. I due mancanti essendo tornati si tratta di dargli la parte spettante loro, ma i compagni che han ricevuto per essi non si ricordano più ciò che hanno avuto; solamente uno si ricorda di esser situato il secondo per ruolo e il suo camerata assente il settimo; l'altro sa di essere l'undecimo e il camerata assente il quarto. Quanto tocca a ciascuno.

Resultato. Al secondo toccano lire 54, 75, al settimo 37, 25, al quarto 47, 75, all'undecimo 23, 25.

155.° In una progressione aritmetica di otto termini la somma dei sei medi è $49 \frac{1}{2}$ e il prodotto degli estremi è $40 \frac{1}{2}$; determinare la progressione.

Resultato. La progressione è:

$$\div 3 \cdot 4 \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 \frac{1}{2}.$$

156.° Trovare la somma dei primi n numeri dispari.

Resultato. n^2 .

157.° Un monte di ghiaia è distante 40^m da un viale di alberi. Il viale esige per esser coperto di ghiaia 100 vetture a 6^m di distanza una dall'altra. Si domanda il cammino totale che dovrà fare il vetturino, onde situare al posto le vetture dovendo poi ricondurle al punto di partenza vale a dire al monte di sabbia.

Resultato. Metri 67400.

§ 16.

158.° Un francese a Pietroburgo scommesse che la Neva sarebbe gelata l'8 novembre; condizioni della scommessa erano che per ogni giorno di precedenza o di ritardo, egli darebbe o riceverebbe 3 volte più del giorno precedente cominciando il primo giorno da 5 centesimi: la Neva essendo gelata il 20 novembre quanto ha dovuto dare l'ultimo giorno e quanto in tutto?

Resultato. Per l'ultimo giorno doveva dare L. 8857,35
in tutto. • 13286.

§ 19.

159.° Un individuo possiede una somma di 100000 lire che situa a interesse composto del 5 per %, ma abbisogna ogni anno di lire 6000 pel suo mantenimento; è dunque forzato di intaccare il suo capitale. In quanto tempo lo avrà consumato?

160.° Un individuo deve pagare a rate eguali 3750 lire in 6 anni. Volendo pagar subito quanto dovrebbe dare al creditore? La quota dell'interesse è supposta del 4 per %.

TRIGONOMETRIA.

1.° Determinare il seno e coseno della somma di tre archi in funzione dei seni e coseni degli archi semplici.

Resultato.

$$\begin{aligned}\text{sen. } (a + b + c) &= \text{sen. } a \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \cos. a \cos. c \\ &\quad + \text{sen. } c \cos. a \cos. b - \text{sen. } a \text{sen. } b \text{sen. } c \\ \cos. (a + b + c) &= \cos. a \cos. b \cos. c - \text{sen. } a \text{sen. } b \cos. c \\ &\quad - \text{sen. } a \text{sen. } c \cos. b - \text{sen. } b \text{sen. } c \cos. a.\end{aligned}$$

2.° Data $\text{tang. } a$ e $\text{tang. } \frac{1}{2} a$ calcolare $\cos. a$.

Resultato.
$$\frac{1}{1 + \text{tang. } a \text{ tang. } \frac{1}{2} a}$$

3.° Trovare il seno e coseno dell'arco di 48° .

Resultato.

$$\begin{aligned}\text{sen. } 48^\circ &= \frac{\sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}}{8} \\ \cos. 48^\circ &= \frac{\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1}{8}\end{aligned}$$

4.° Trovare la tangente dell'arco di 15° .

Resultato.
$$2 - \sqrt{3}.$$

5.° Determinare l'angolo x nell'equazione.

$$\text{tang. } 30^\circ + \text{tang. } 15^\circ + \text{tang. } x = \text{tang. } 30^\circ \text{ tang. } 15^\circ \text{ tang. } x.$$

Resultato.
$$x = 135^\circ$$

6.° Trovare l'arco nel quale il seno è $\frac{1}{2}$ del coseno.

Resultato.
$$39^\circ, 48'', 19''.$$

7.° Determinare a meno di un centimetro e per mezzo delle tavole la cosecante dell'arco di $38^{\circ}, 15', 21''$ nel circolo di raggio $1^m, 78$.

Resultato. $2^m, 87$.

8.° L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è di $0^m, 76$; un cateto di $0^m, 45$. Risolvere il triangolo.

Resultato. L'altro cateto è a meno di un centim. $0, 62$.

I due angoli acuti di $\left\{ \begin{array}{l} 36^{\circ}, 18', 23'' \\ 53^{\circ}, 41', 37'' \end{array} \right.$

9.° L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è $1^m, 15$, uno degli angoli acuti di $23^{\circ}, 34', 56''$. Risolvere il triangolo.

Resultato. L'altro angolo acuto resulta di $66^{\circ}, 25', 4''$.

I cateti a meno di 1 cent. $\left\{ \begin{array}{l} 0, 46, \\ 6, 05. \end{array} \right.$

10.° I due cateti di un triangolo rettangolo sono di 78^m e 90^m . Risolvere il triangolo.

Resultato.

I due angoli acuti resultano: $\left\{ \begin{array}{l} 49^{\circ}, 5', 8'' \\ 40^{\circ}, 54', 52'' \end{array} \right.$

L'ipotenusa a meno di 1 centimetro è di $119^m, 09$.

11.° Un cateto di un triangolo rettangolo è di 135^m ; l'angolo acuto opposto di $79^{\circ}, 1', 4''$. Risolvere il triangolo.

Resultato. L'altro angolo acuto è $10^{\circ}, 58', 56''$.

L'altro cateto a meno di 1 centim. $26^m, 20$.

L'ipotenusa id. $137^m, 83$.

12.° La base di un triangolo è 6926^m ; i due angoli ad essa adiacenti resultano di 78° e $91^{\circ}, 22''$. Risolvere il triangolo.

Resultato. Il terzo angolo è di $10^{\circ}, 38'$.

Gli altri due lati sono $\left\{ \begin{array}{l} 36714, 36, \\ 37523, 89. \end{array} \right.$

13.° Due lati di un triangolo sono rispettivamente di 128^m e 956^m ; l'angolo opposto a quest'ultimo è di $76^\circ, 18'$. Risolvere il triangolo.

Resultato. Gli altri due angoli sono $7^\circ, 28', 27''$ e $96^\circ, 13', 33''$.
Il terzo lato è $978^m, 19$.

14.° Due lati di un triangolo son rispettivamente di 87^m e 113^m ; l'angolo compreso fra i medesimi è $58^\circ, 17', 32''$. Risolvere il triangolo.

Resultato. Gli altri due angoli sono di $73^\circ, 88', 41''$ e $47^\circ, 43', 47''$.
Il terzo lato è $100^m, 02$.

15.° I tre lati di un triangolo sono di $15^m, 27, 18^m, 74$ e $30^m, 08$. Risolvere il triangolo.

Resultato.

$$\text{I tre angoli sono di } \begin{cases} 21^\circ, 28', 14'' \\ 26^\circ, 42', 40'' \\ 131^\circ, 49', 6'' \end{cases}$$

16.° Il perimetro di un triangolo essendo 18^m e i suoi angoli di $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$, determinare il raggio del circolo inscritto a meno di un centimetro.

Resultato.

$$r = 18, \text{ tang. } 15^\circ, \text{ tang. } 22^\circ, 30', \text{ tang. } 52^\circ, 30',$$

e fatti i calcoli:

$$r = 2^m, 603 \text{ circa.}$$

17.° Calcolare a meno di un centimetro il lato e le diagonali di una losanga sapendo che la sua superficie è di 10^m e l'angolo acuto di 38° .

Resultato.

$$\begin{array}{l} \text{Lato} \dots\dots\dots 4^m, 03 \\ \text{Diagonale maggiore} \dots 7^m, 62 \end{array}$$

18.° Un triangolo isoscele ha 3^m di base e gli altri due lati di 5^m ciascuno. Dividerlo con una retta che passi pel

vertice in guisa che i due triangoli parziali che ne risultano stiano in superficie come 2 : 3.

Resultato. I due segmenti nei quali la retta che risolve il problema taglia la base sono 1,20 e 1,80.

19.° Trovare la corda dell'arco di 69° nel cerchio di raggio $2^m, 7$.

20.° Date le tre altezze h, h', h'' di un triangolo, risolvere il triangolo.

21.° Trovare la superficie del pentadecagono regolare inscritto nel cerchio di raggio R .

Resultato.
$$\frac{15 R^2}{2} \text{ sen. } 24.^\circ$$

22.° In un quadrilatero $ABCD$ si ha (*fig. 286*) $AB = 8^m$, $BC = 11^m$, $CD = 7^m$, $DA = 6^m$, $AC = 15^m$. Calcolare l'altra diagonale BD .

23.° Nel cerchio la corda di un arco è 1^m ; la saetta $0^m, 30$. Calcolare l'area del segmento.

24.° I quattro lati di un trapezio son rispettivamente $5^m, 7^m, 3^m, 2^m, 50$; i primi due son le basi. Calcolare a meno di un decimetro quadro l'area del trapezio.

Resultato. $27^m, 39.$

25.° Riprendendo il quadrilatero del problema 22.°, calcolarne l'area.

26.° In un quadrilatero $ABCD$ (*fig. 287*) si dà:

$$\begin{aligned} AB &= 217^m, 65, \\ DAB &= 50^\circ, 18', 17'', \\ CAB &= 30^\circ, 14', 21'', \\ ABC &= 91^\circ, 40'', \\ ABD &= 44^\circ, 10', 25''. \end{aligned}$$

Calcolare gli altri tre lati del quadrilatero.

27.° Con i dati del problema precedente calcolare le due diagonali e i segmenti in cui si tagliano.

28.° Con gli stessi dati dei problemi 26 e 27 calcolare gli angoli C e D .

29.° Un semi-dodecagono regolare di $1^m, 10$ di lato ruota attorno al diametro del suo circolo circoscritto. Trovare il volume che esso genera a meno di un decimetro cubo.

30.° L'inclinazione della generatrice di un cono sul piano della base è di 50° ; il raggio del circolo base di 1^m . Calcolare l'altezza ed il volume del cono.



C11937



INDICE DELLE MATERIE

PREFAZIONE	Pag. 1
----------------------	--------

Programma primo.

Aritmetica.	3
---------------------	---

Programma secondo.

Geometria	90
Geometria solida	213

Programma terzo.

Algebra	317
-------------------	-----

Programma quarto.

Trigonometria rettilinea	446
------------------------------------	-----

Raccolta di problemi ed esercizi.

Aritmetica.	501
Geometria piana	513
Geometria solida	523
Algebra.	533
Trigonometria	562

Errata-Corrige.

A pag. 10 alinca 24 invece del segno + leggasi \times
 " 51 " 20 " di ettometro " centimetro.

Fig. 36.



Fig. 41.

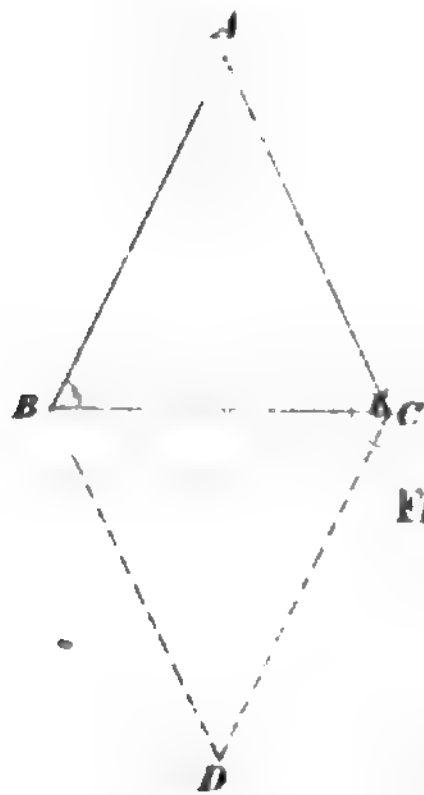
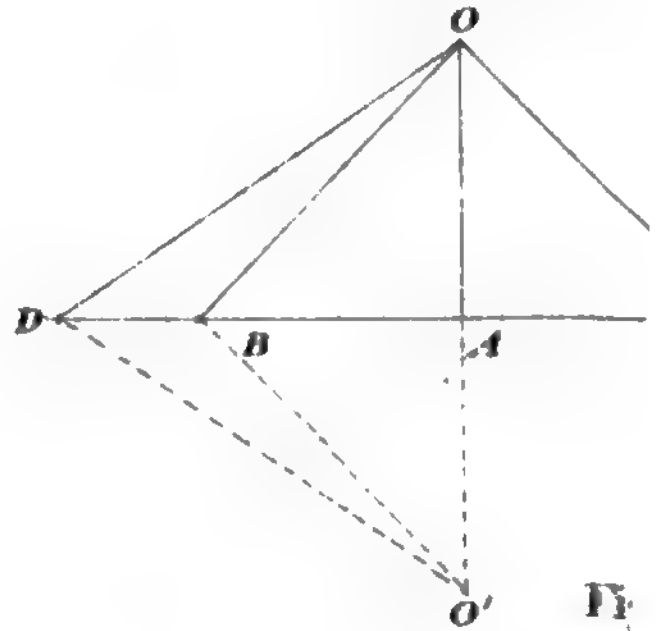


Fig. 48.

E

Fig. 42.



A G

B

C

C'

L

D

A

D'

P

Fig. 56.

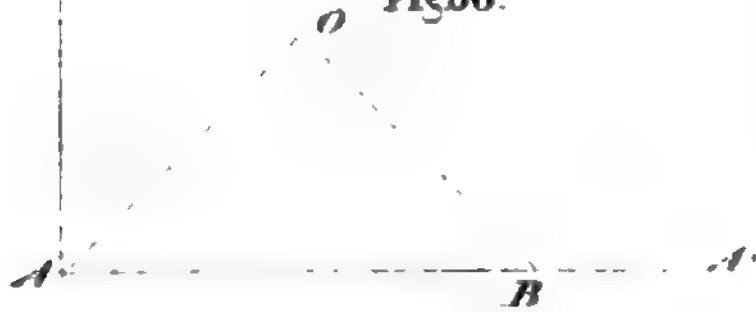


Fig. 57.



Fig 64

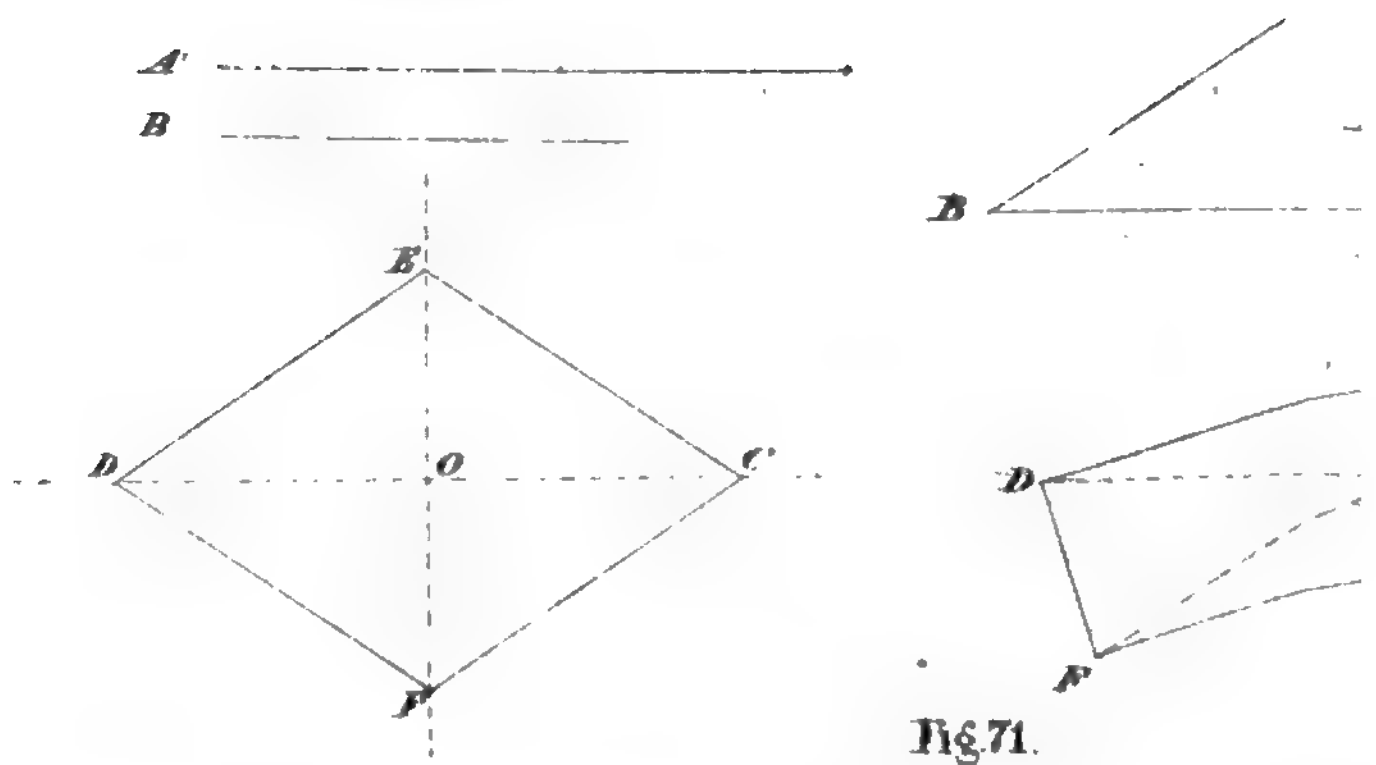


Fig 70.

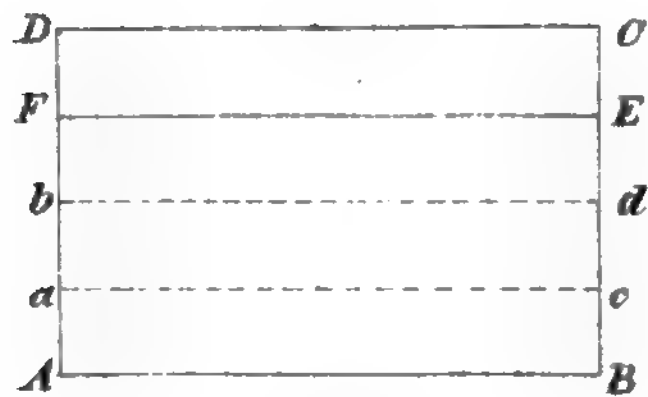


Fig 78.

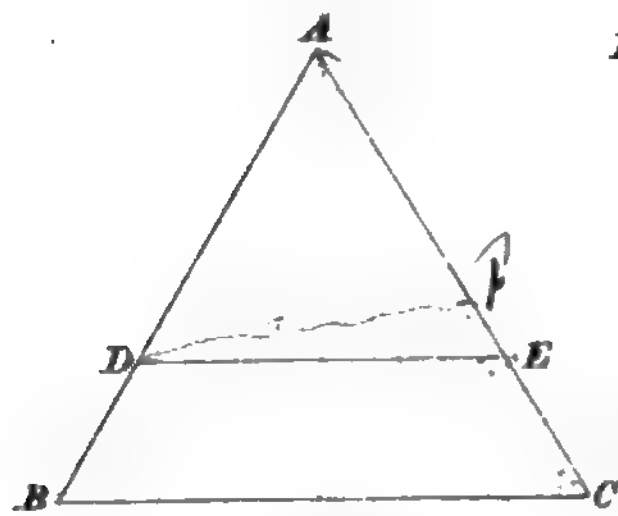


Fig 79.

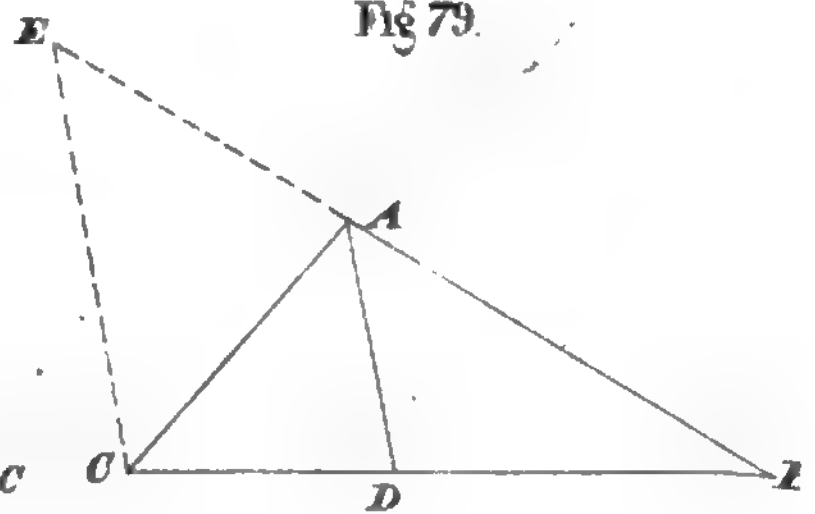


Fig 85

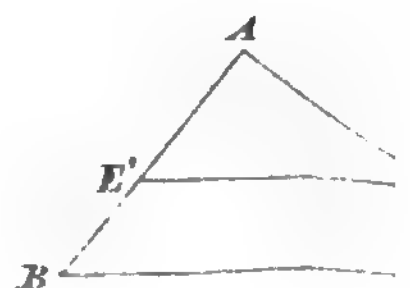
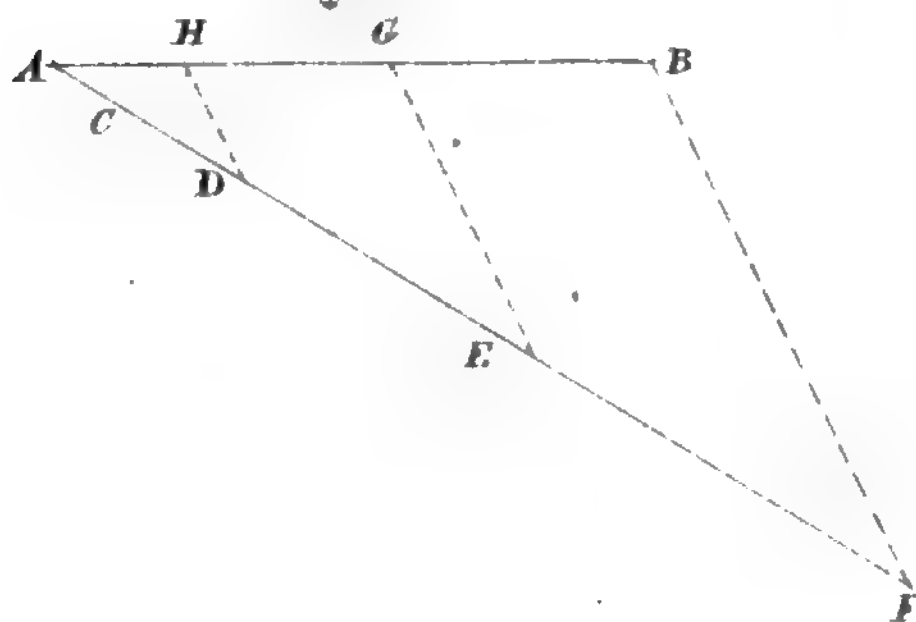


Fig 6



Fig 75

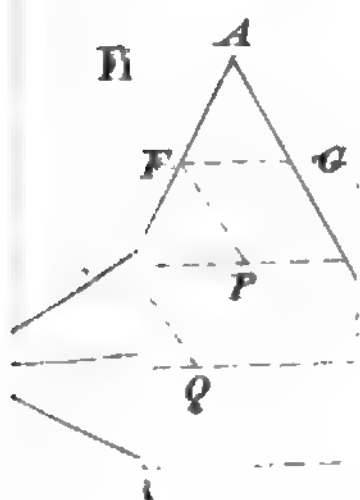


Fig. 83.

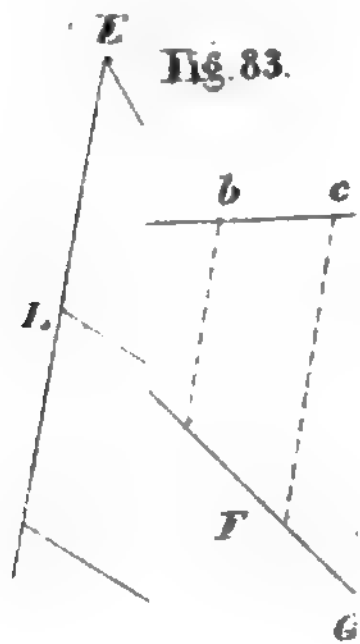


Fig 86.

c

Fig. 90.

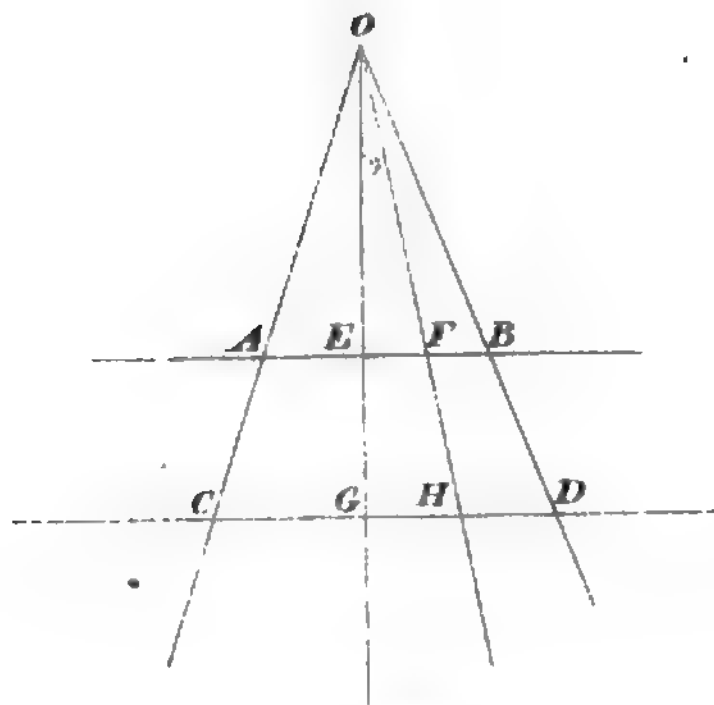


Fig. 91.

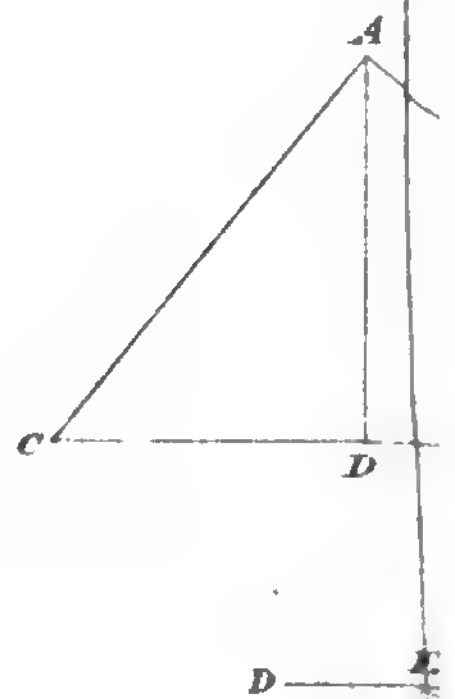


Fig. 97.

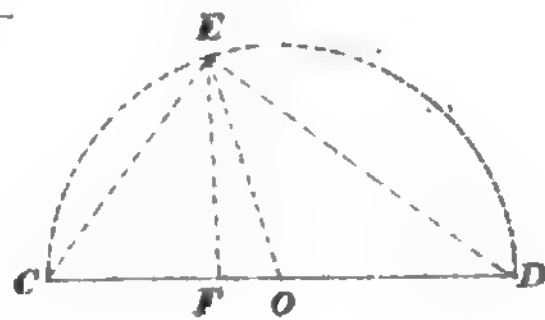


Fig. 102.

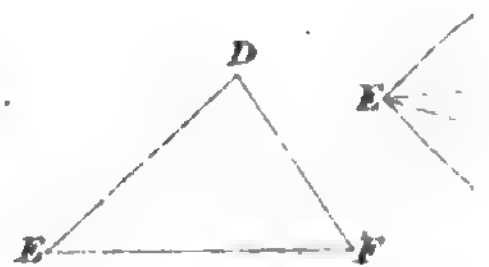


Fig. 108.

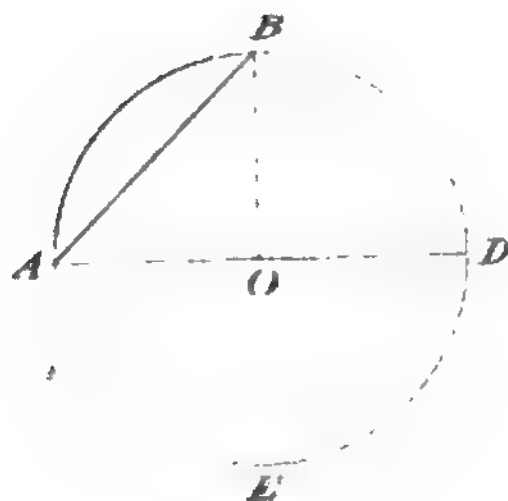
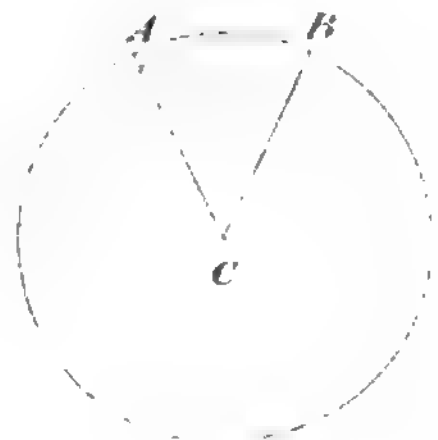


Fig.



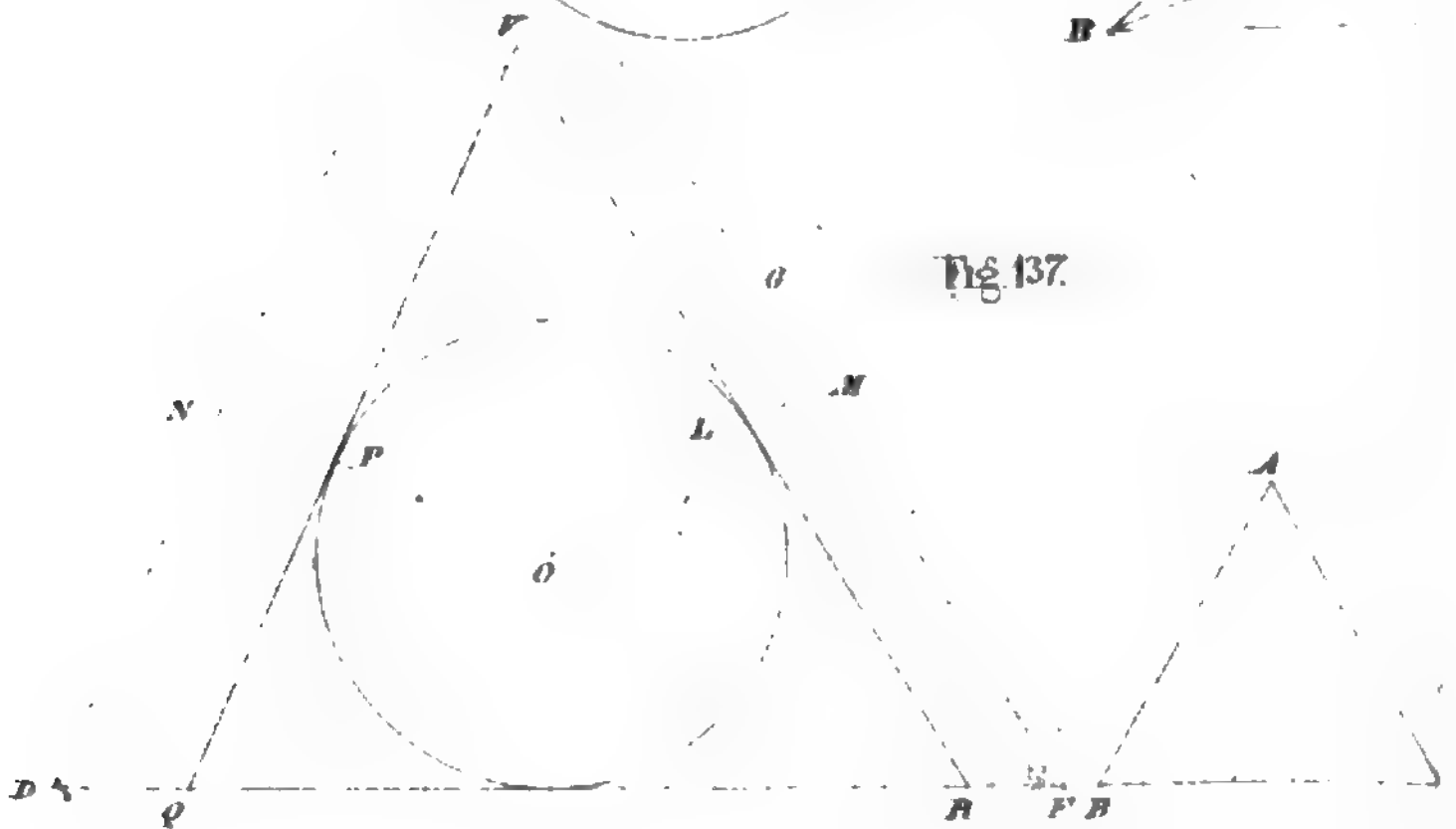
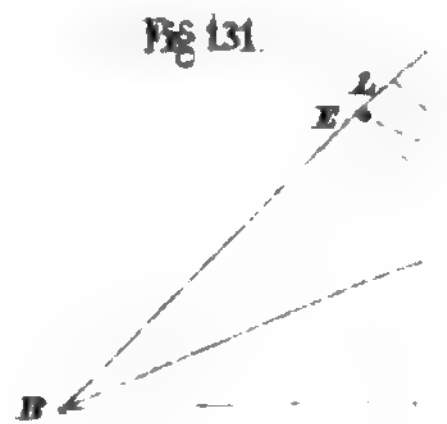
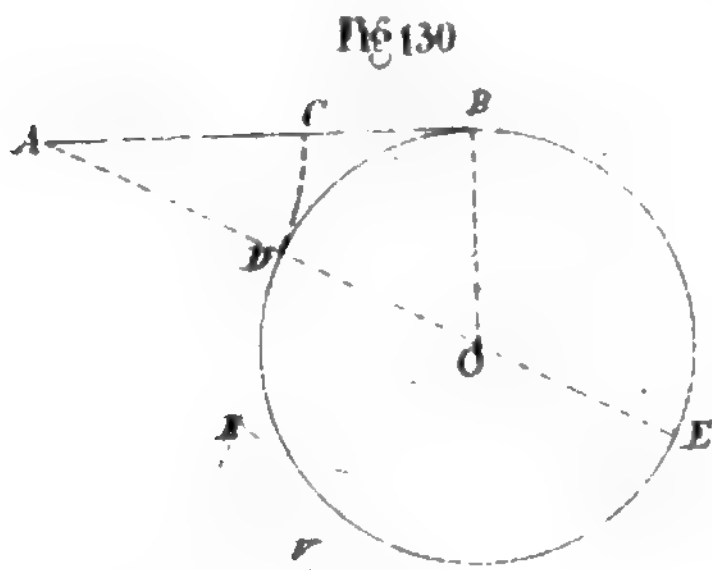
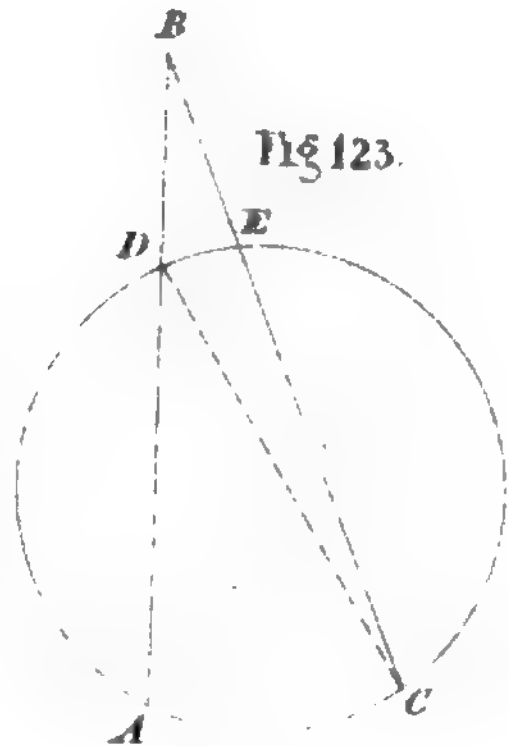
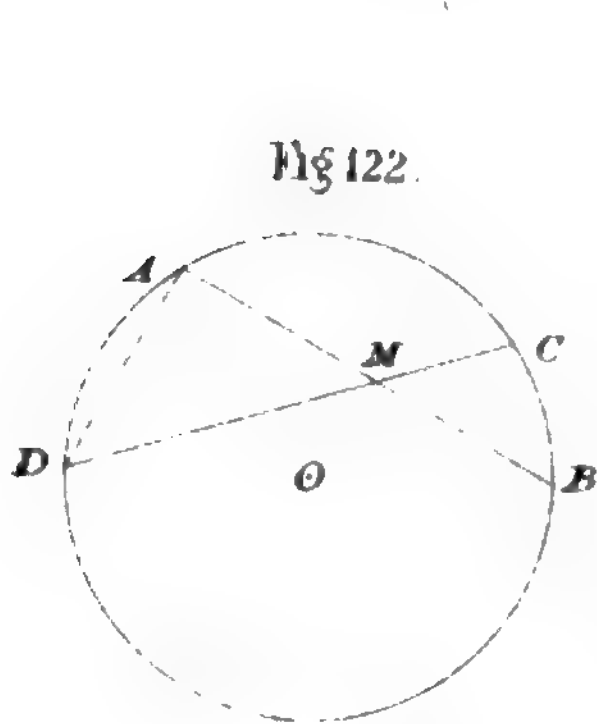
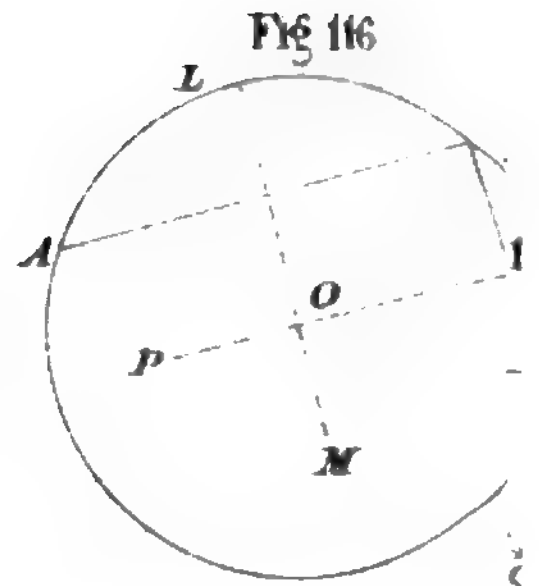
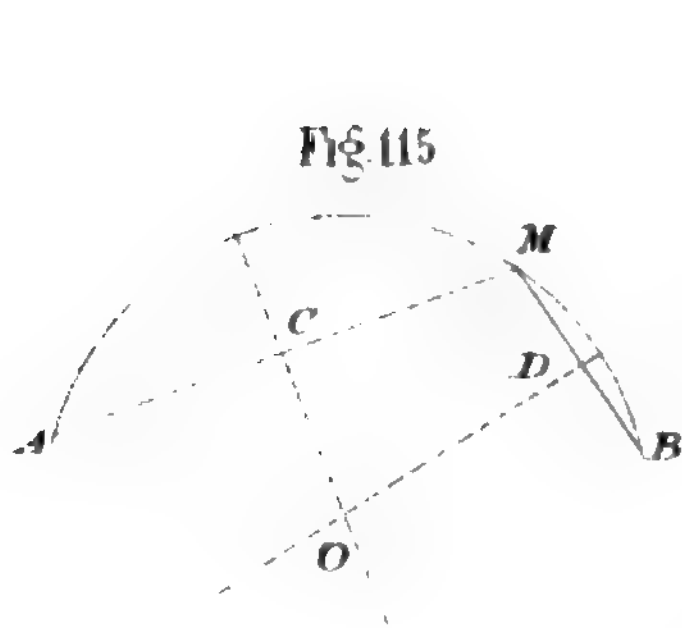


Fig. 117

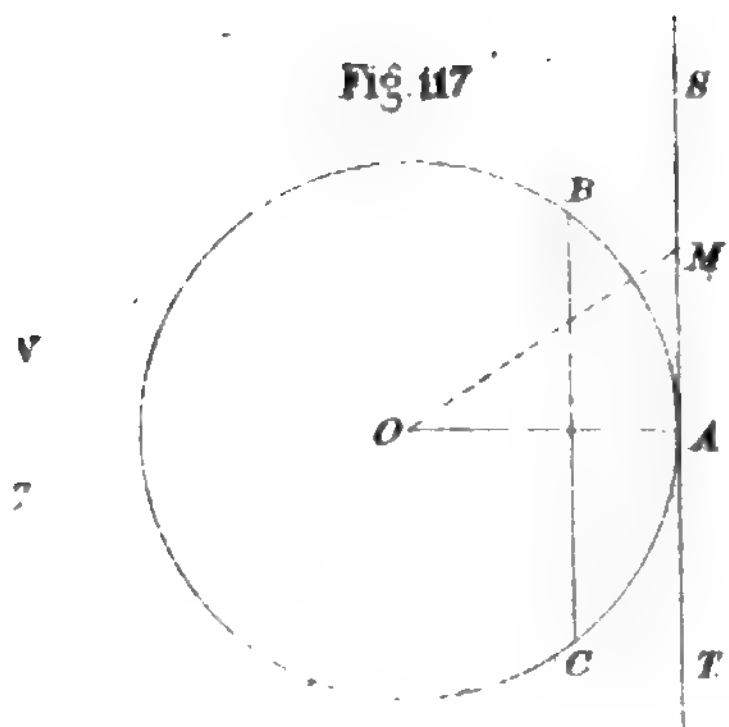


Fig. 118

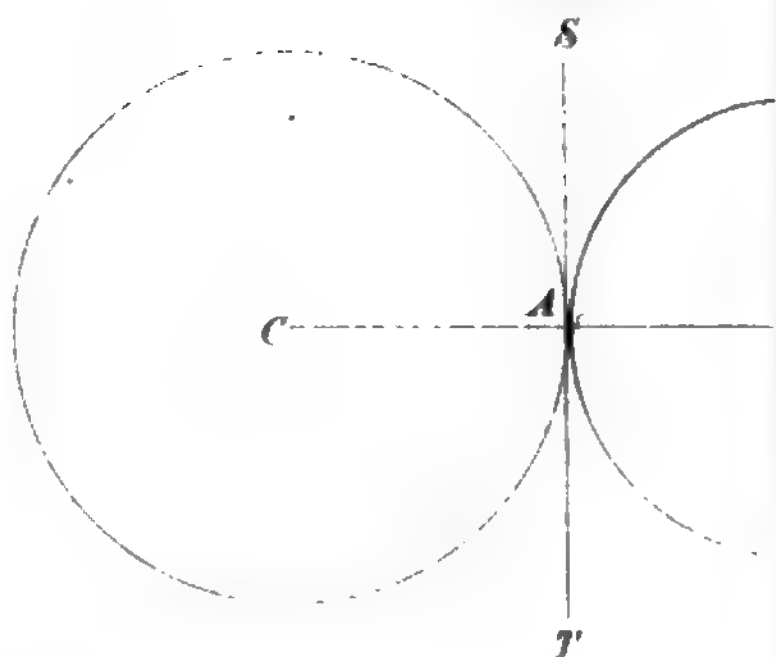


Fig. 124.

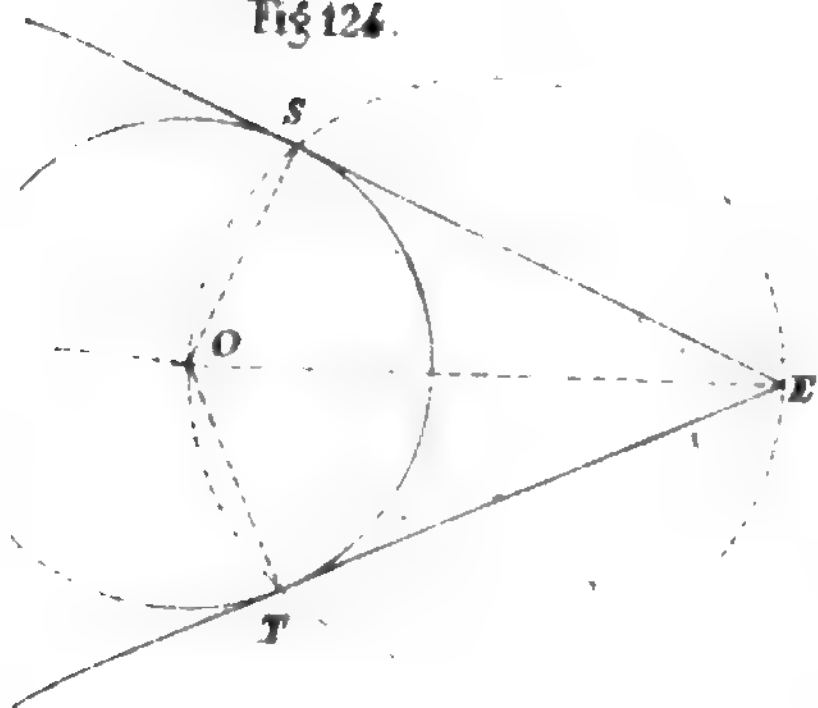


Fig. 125

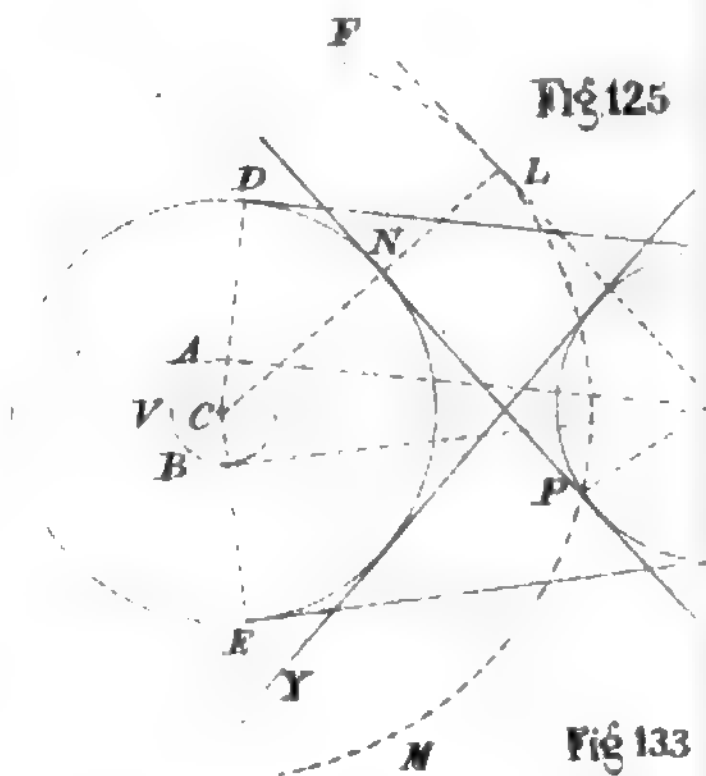


Fig. 132.

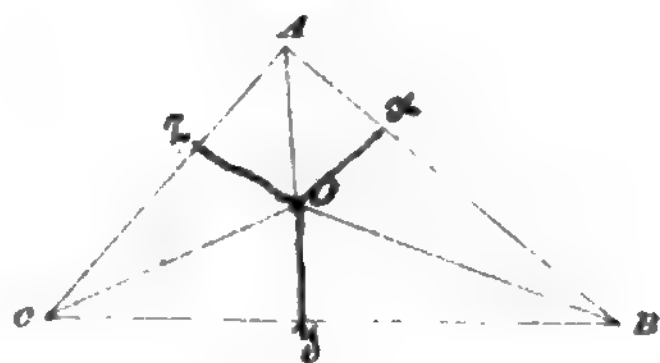


Fig. 133



Fig. 138.



Fig 143

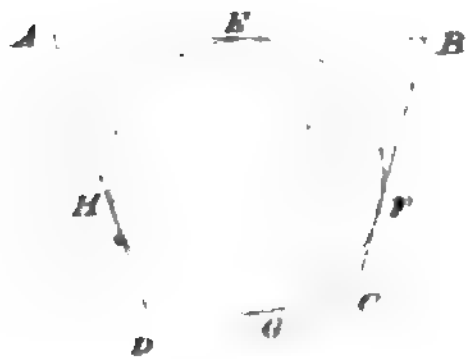


Fig 144

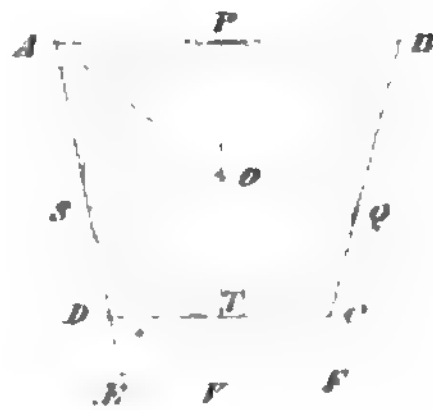


Fig.

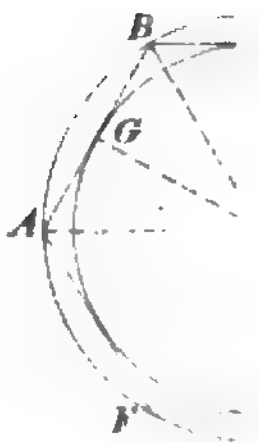


Fig 153

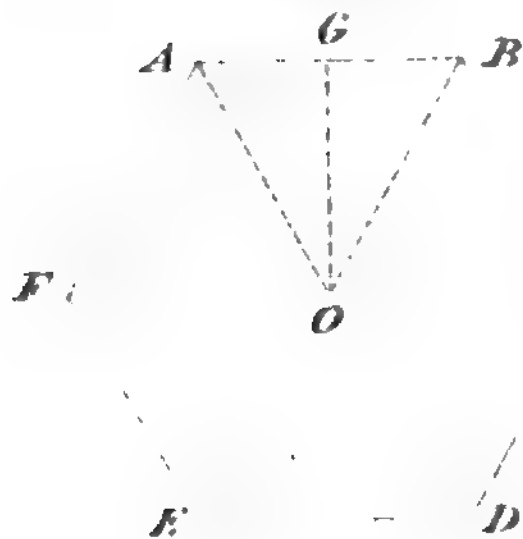


Fig 154

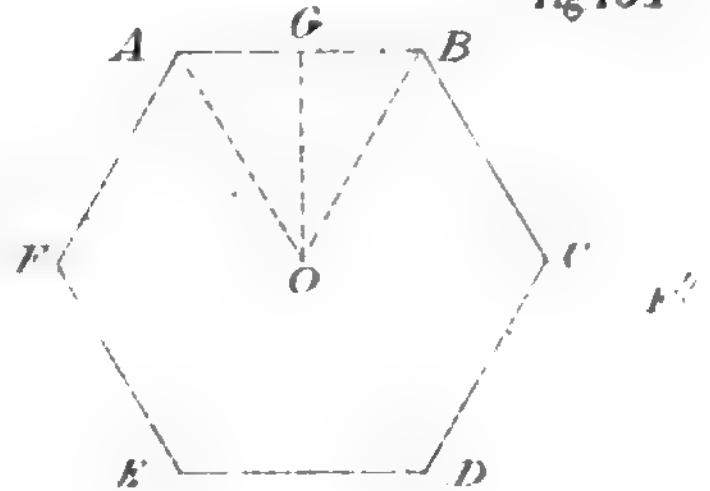


Fig 162

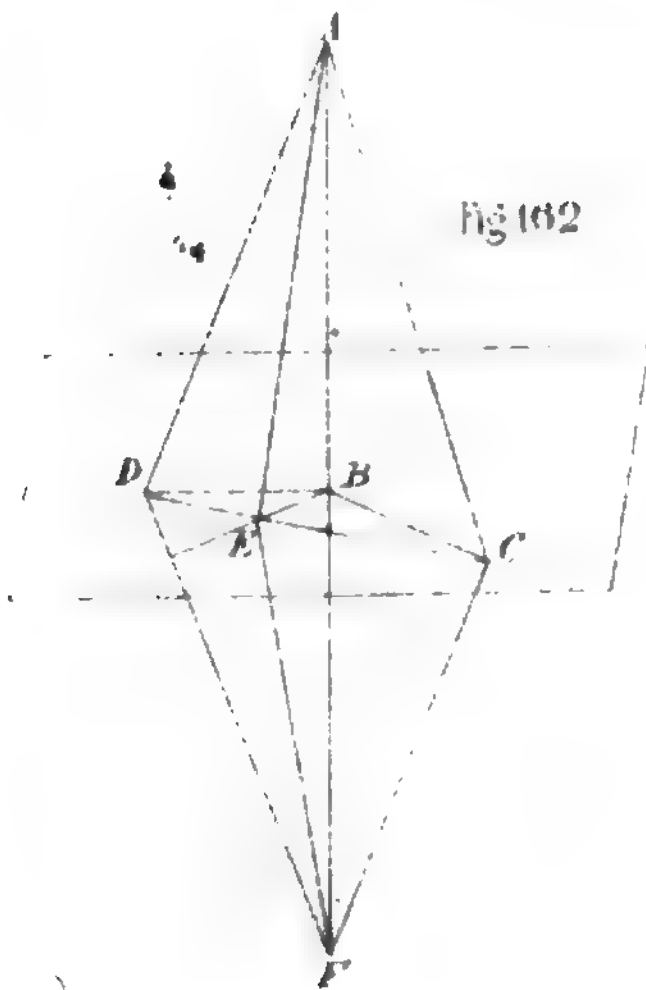
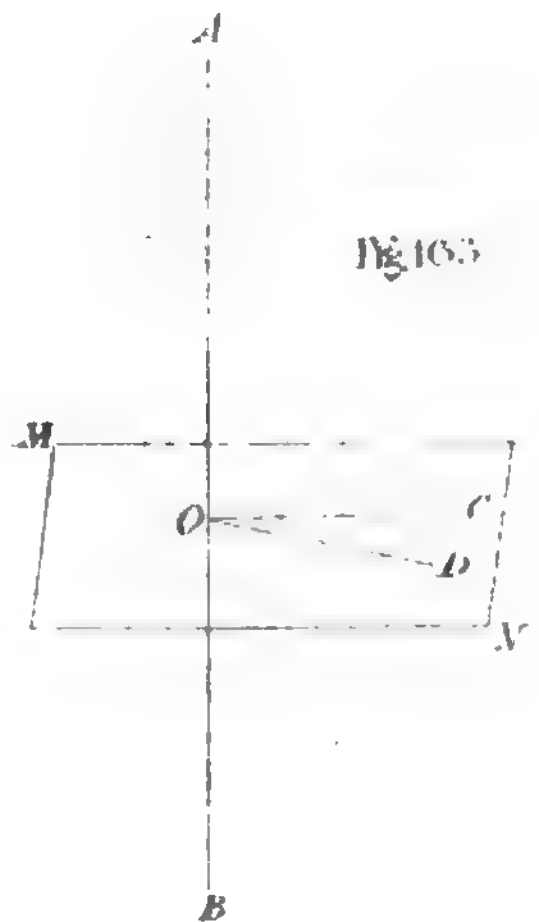


Fig 163



161

Fig. 146.

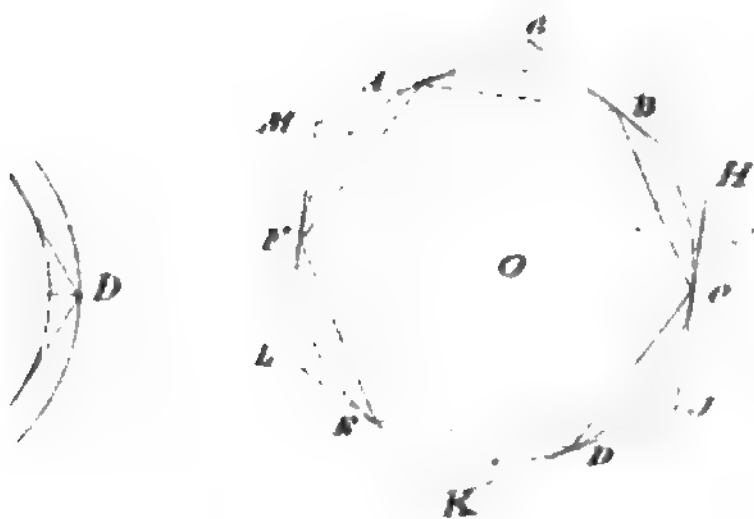


Fig. 147.

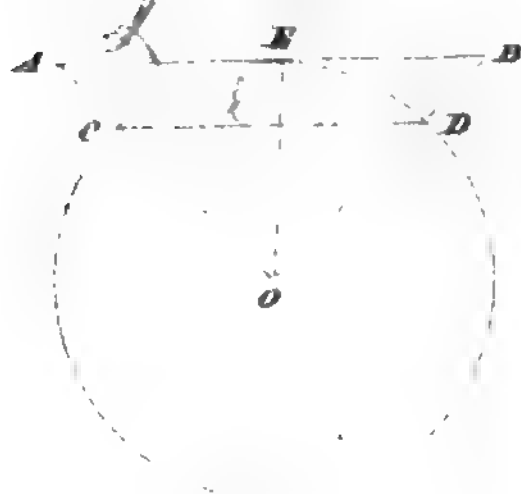


Fig. 155.

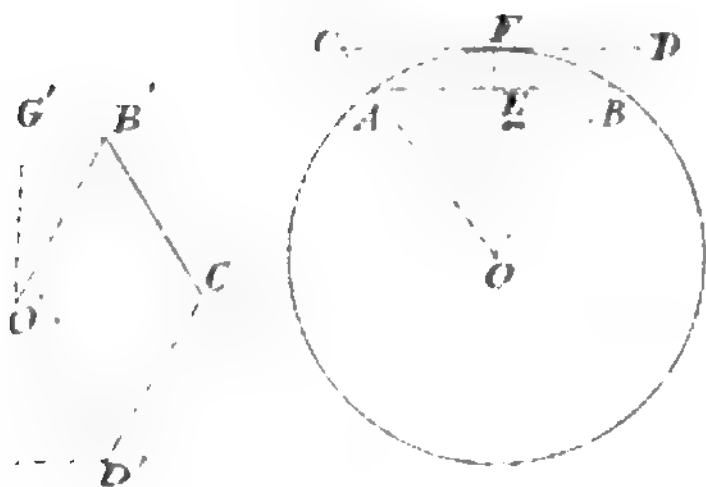


Fig. 156.

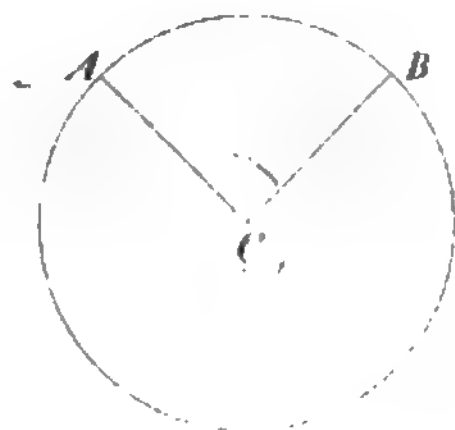


Fig. 163



Fig. 164

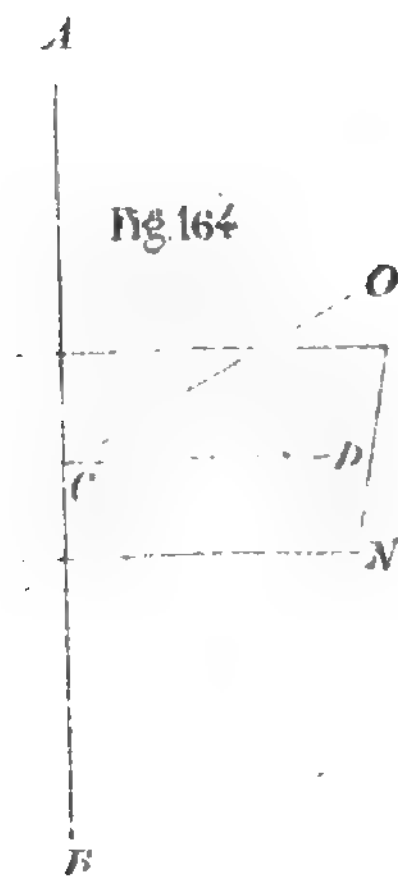


Fig. 170

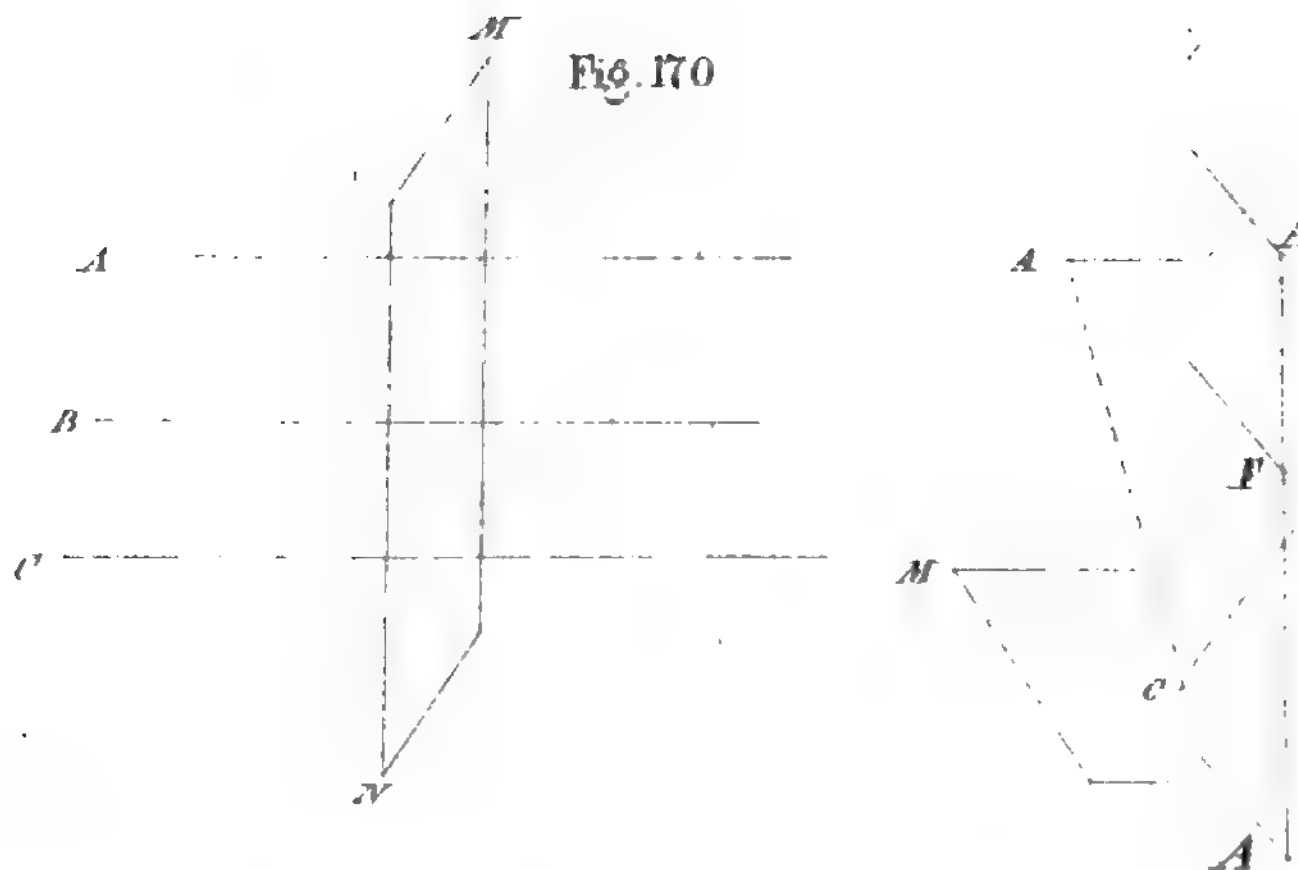


Fig 177

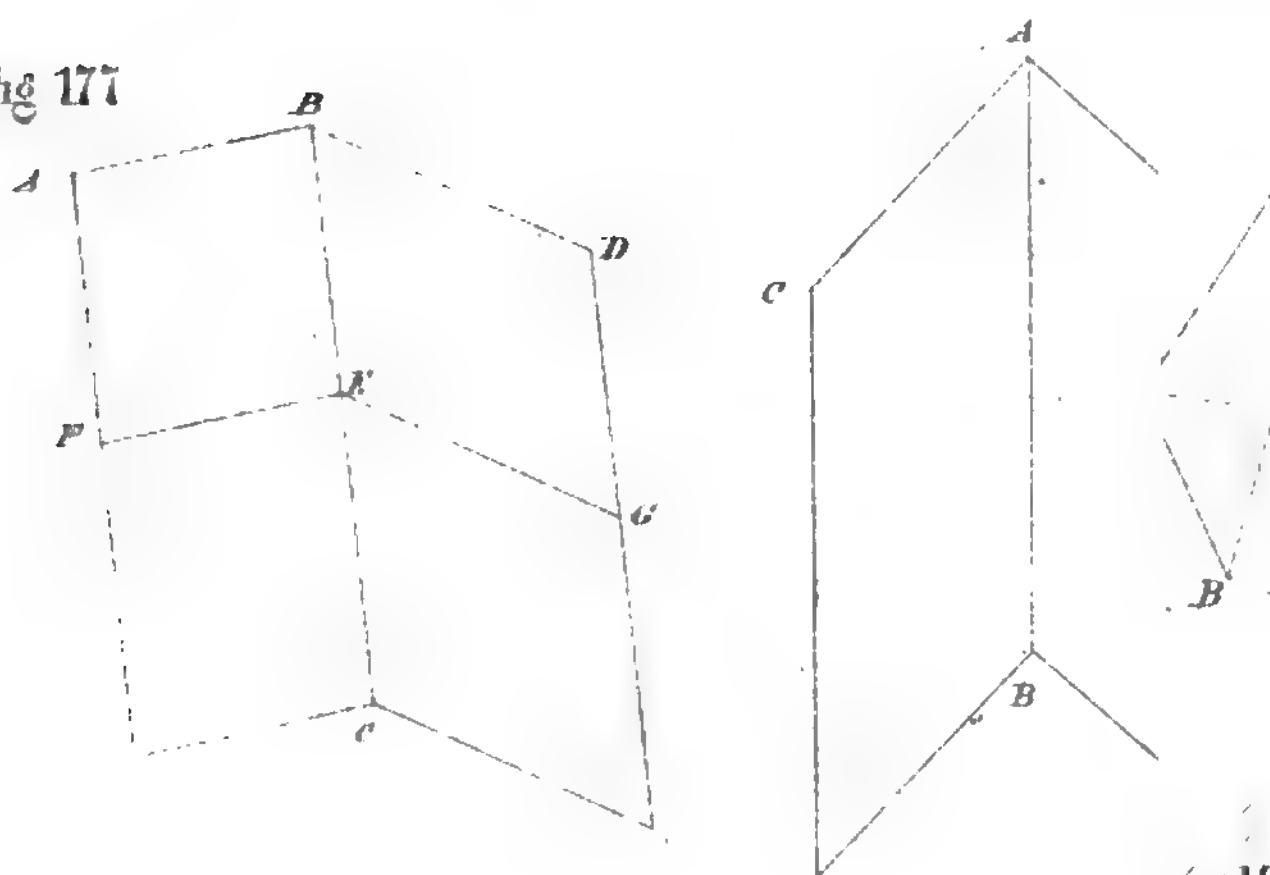


Fig 183.

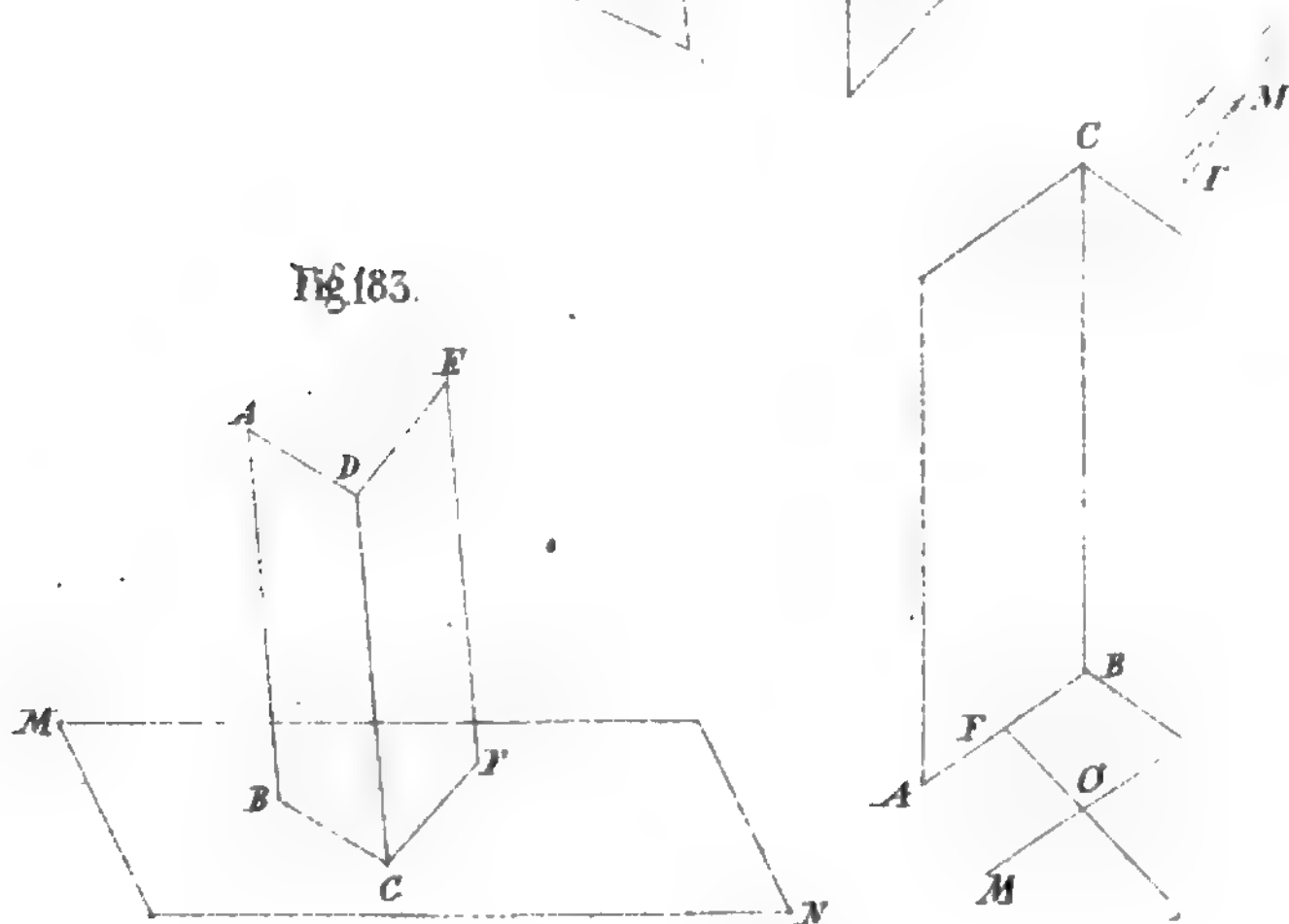


Fig.

Fig. 176



Fig.

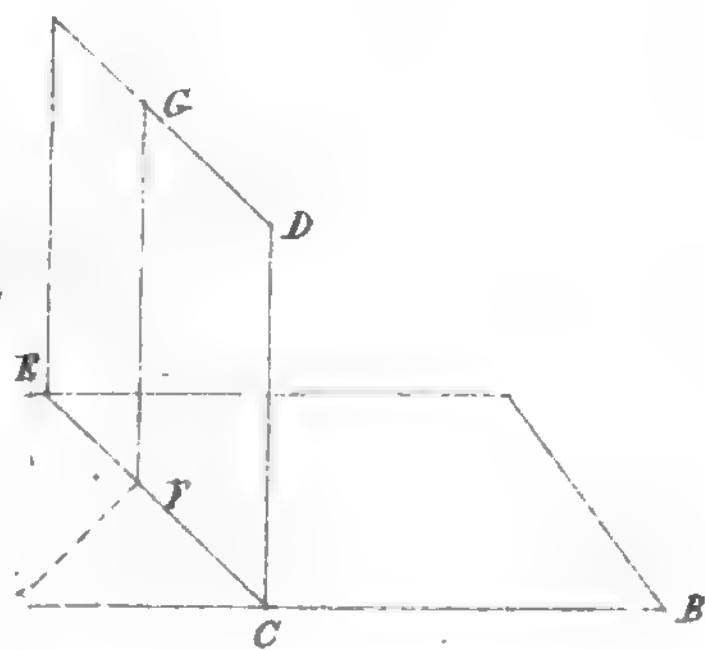
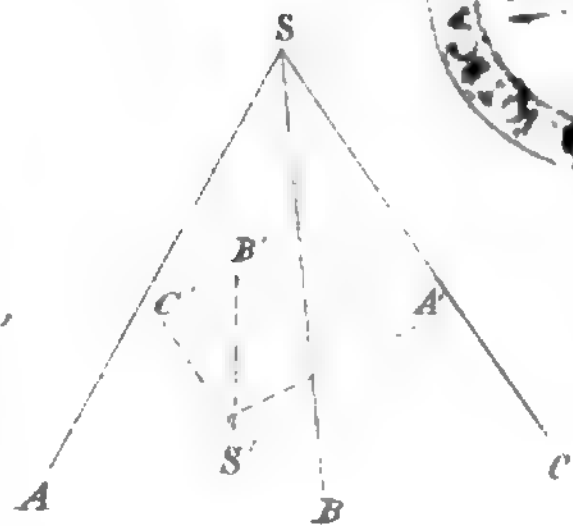


Fig. 184



Fig. 190.



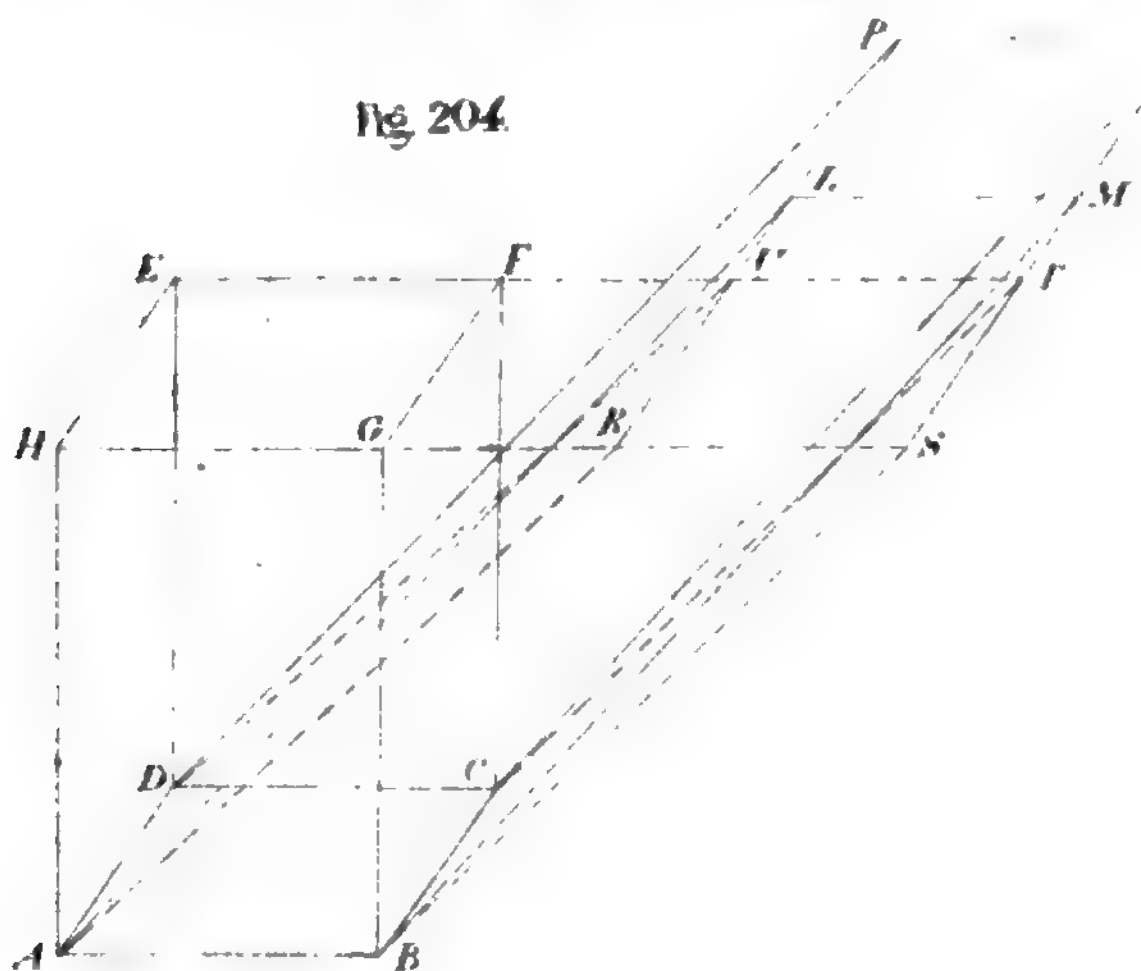
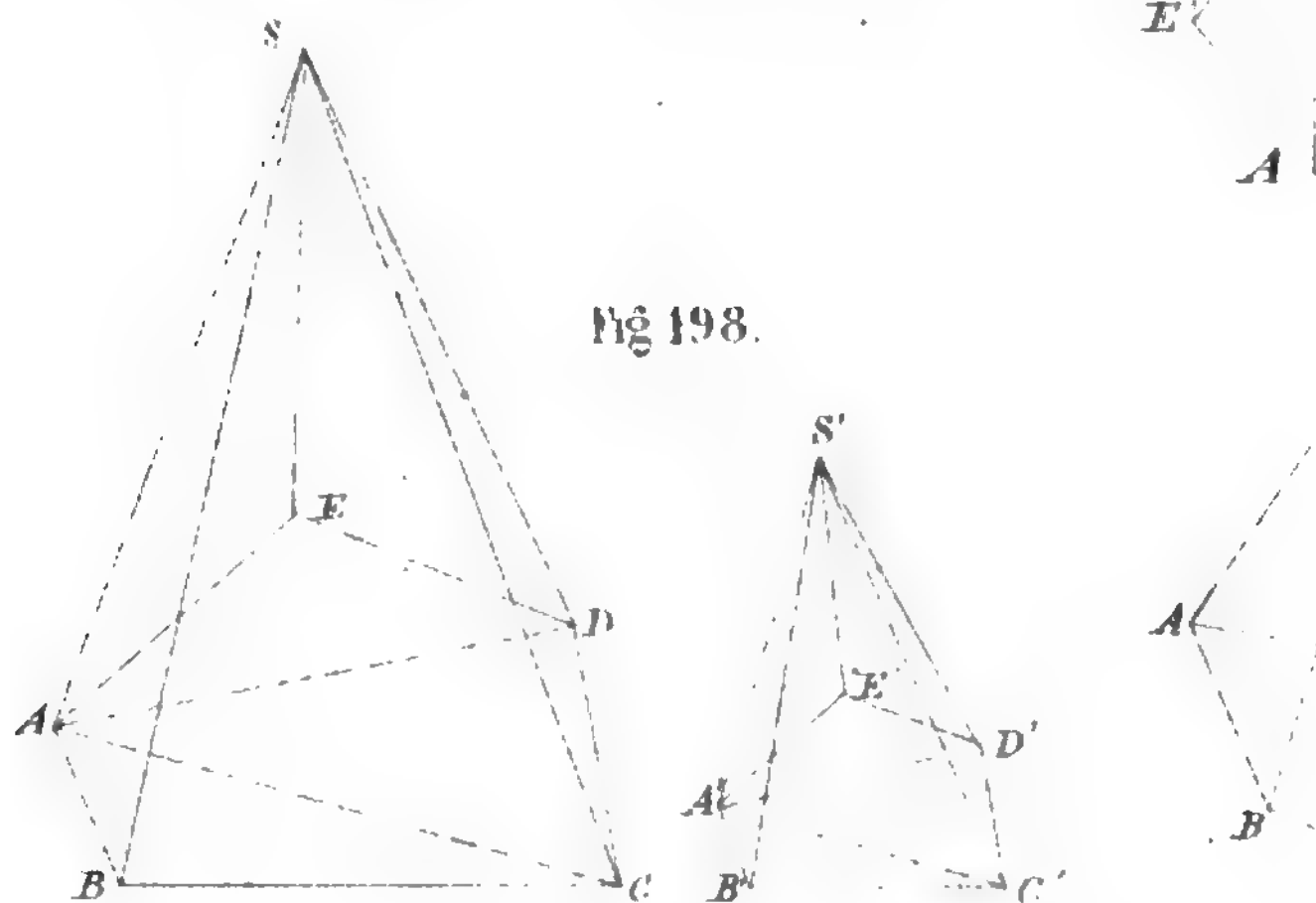
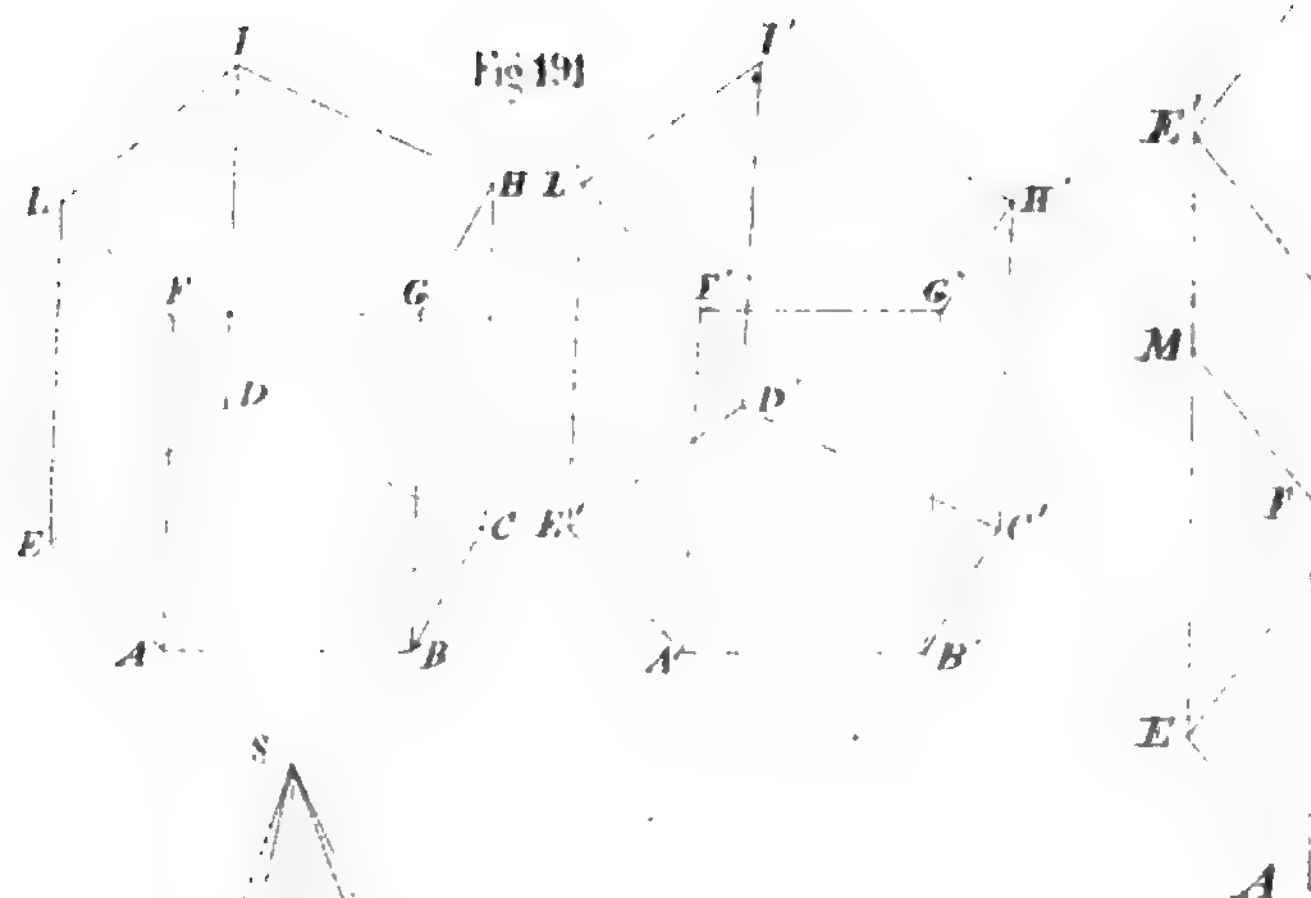


Fig. 210

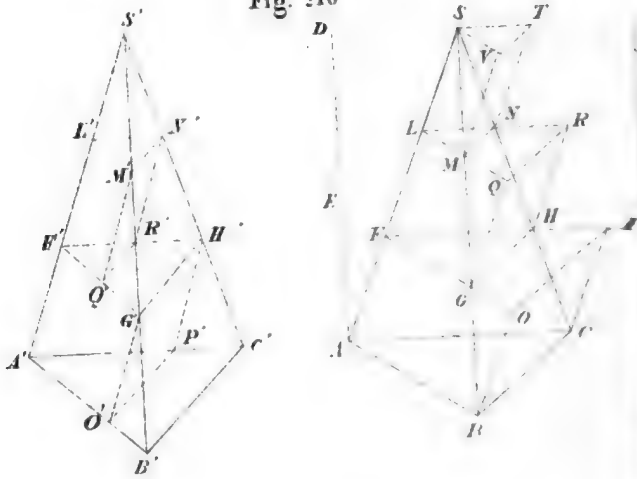


Fig. 217

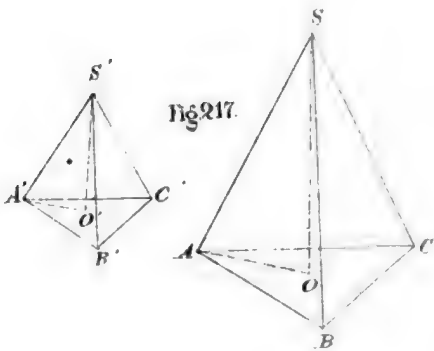


Fig.



Fig. 224

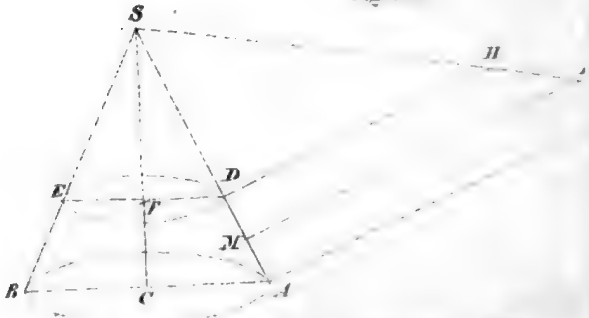


Fig. 211

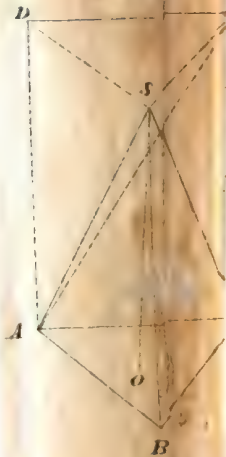


Fig. 216

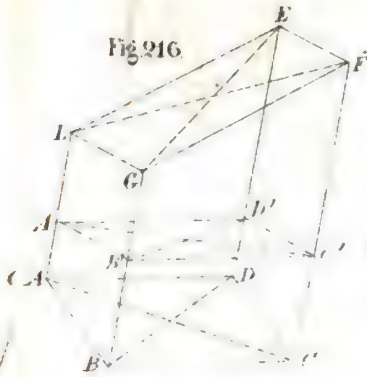
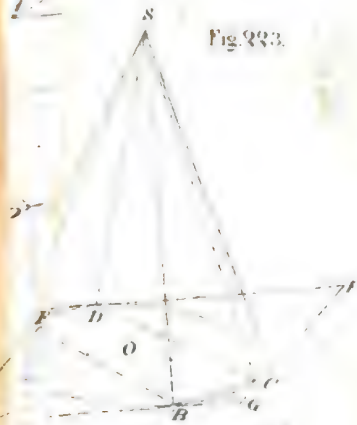


Fig. 223



218.

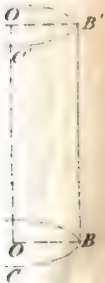


Fig. 225



Fig. 231



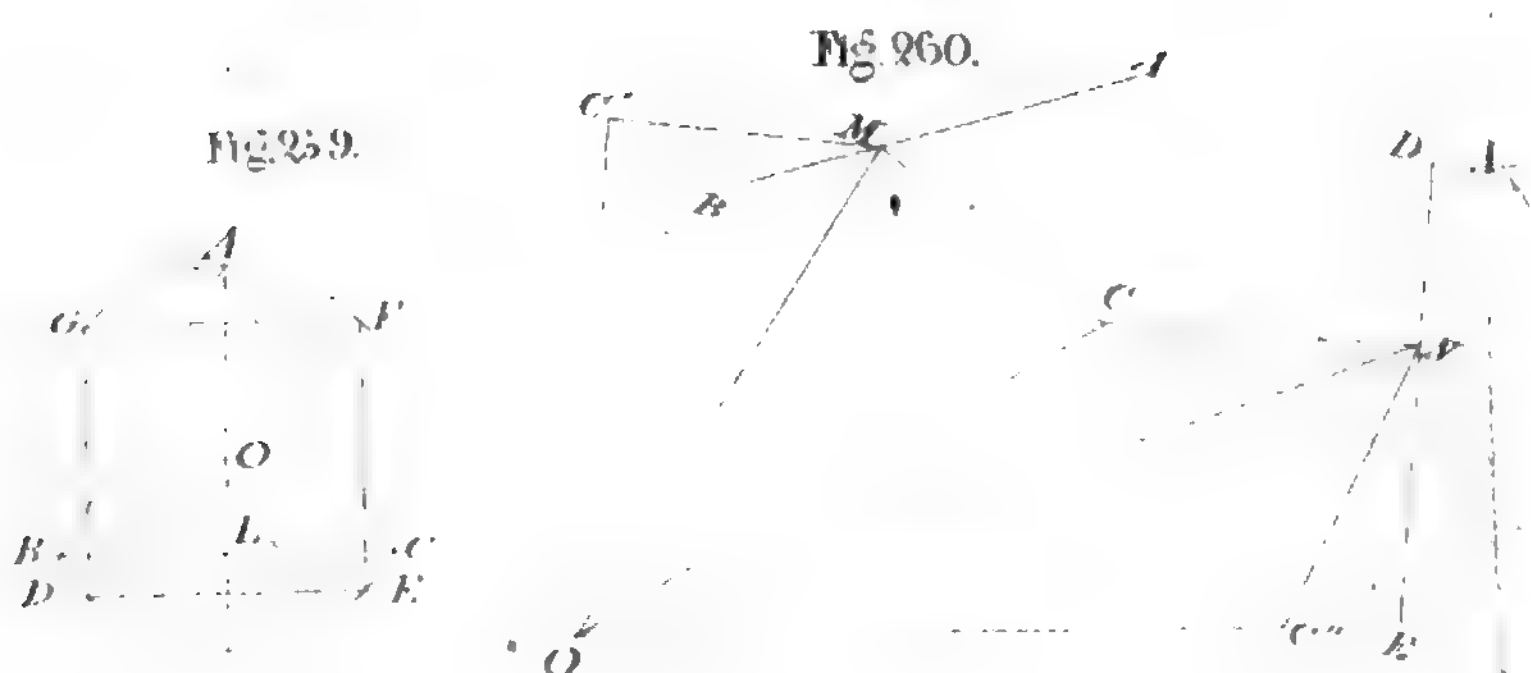


Fig 266

Fig 267

Fig 268

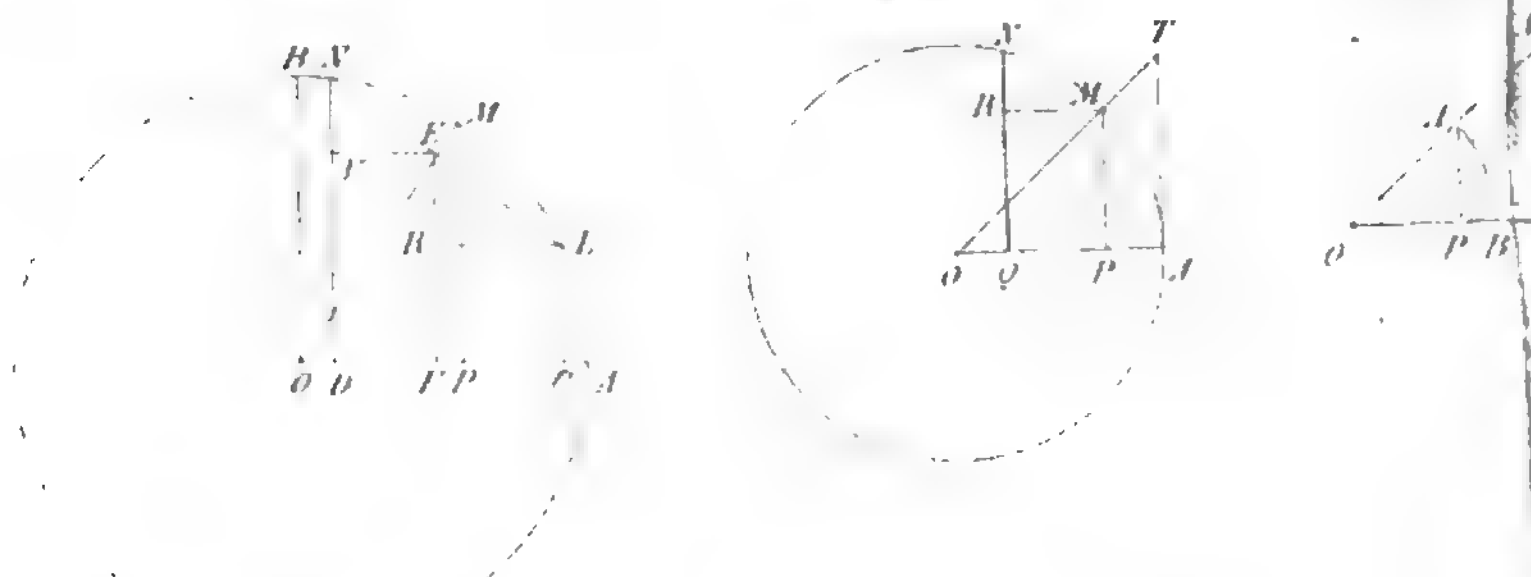


Fig. 274

Fig 273

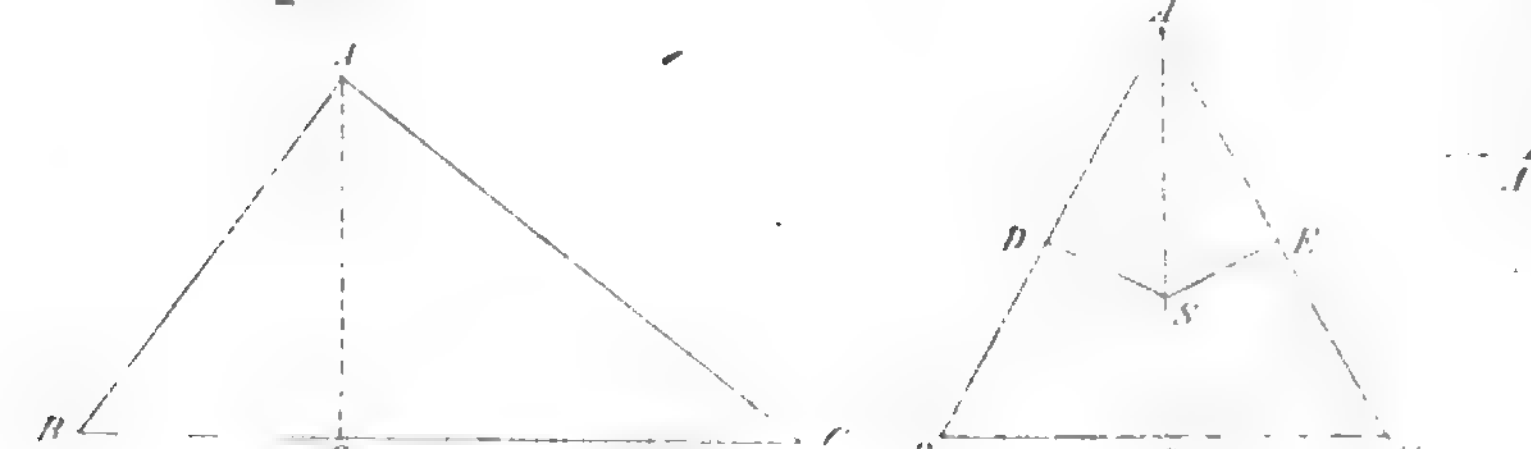
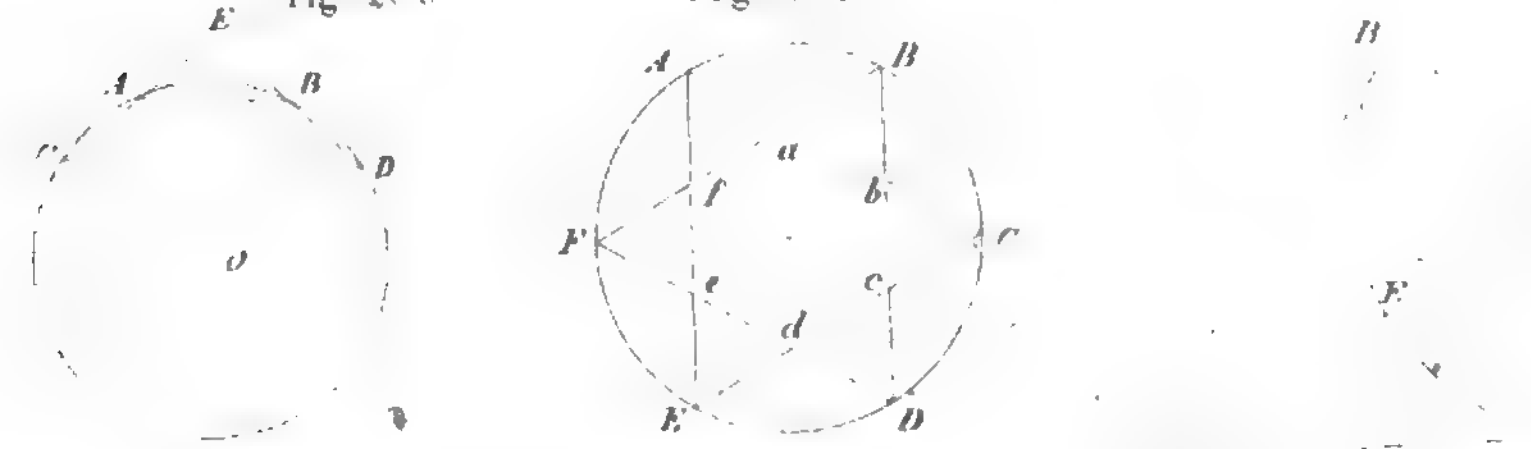
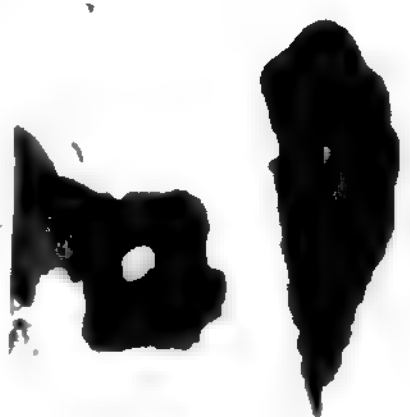


Fig 280

Fig 281



M'
 F'
 M''



B

D

278



Fig. 2

